

Grau en Matemàtiques

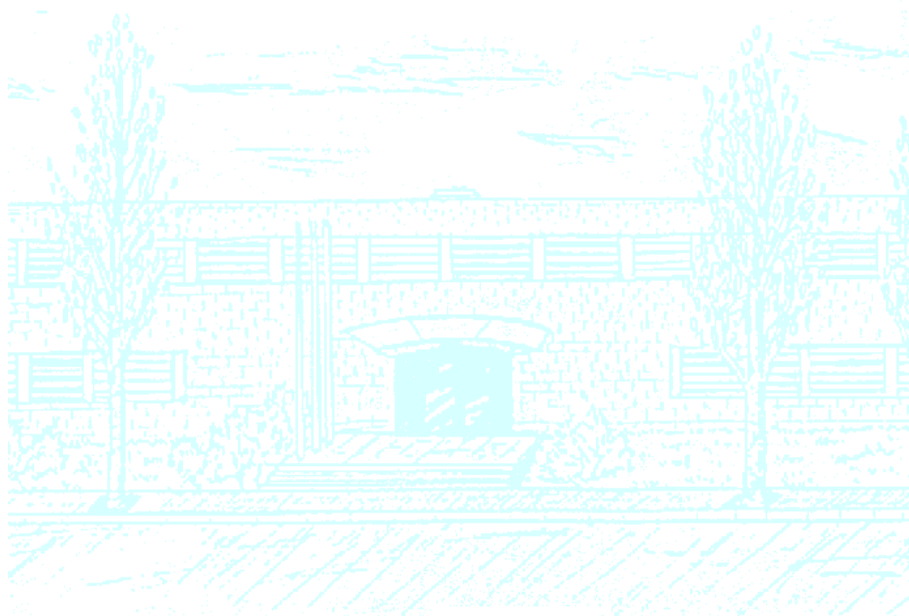
Títol: Modelització estocàstica en temps continu. Aplicació a les dinàmiques de calor d'un edifici

Autor: Roger Serra Castilla

Director: Josep Anton Sánchez Espigares

Departament: Estadística

Convocatòria: Gener, 2019-2020



Al Josep Anton Sánchez, director d'aquest treball de fi de grau, per la seva dedicació, paciència i constant suport durant el desenvolupament d'aquest projecte. Gràcies per oferir-me aquesta proposta i haver estat, des del principi, un gran recolzament en totes les tasques.

A la meva família i amics, per la confiança. Especialment als meus pares, per tot el recolzament i suport que m'han donat durant el desenvolupament d'aquest estudi.

Abstract

Stochastic modelling in continuous time. Application to the heat dynamics of a building

In the current context of climate emergency, it is necessary to analyze the energy efficiency of buildings, including heat dynamics. Therefore, it is necessary to be able to determine which elements can modify the internal temperature of the building and what this relationship may be.

Based on this situation, the following study aims to describe a method for obtaining detailed information on the heat dynamics of a building using Grey-box modelling, which combines a partial theoretical structure with data to complete a model.

There is also the need to differentiate different parts in the building, thus obtaining a set of state variables where each is associated with a section.

Stochastic modelling with continuous time and Gaussian residues will be considered. Moreover, the Kalman filter and maximum likelihood estimate, which are the parameter estimation tools used, will be presented and demonstrated.

In addition to that, some information of a building will be applied in order to obtain, validate and analyze the best representation for its thermal dynamics, as well as showing differences between deterministic and stochastic modelling.

Keywords

Grey-box models, Parameter estimation, Continuous time stochastic modelling, Thermal dynamics

Roger Serra Castilla

Índex

Introducció	1
1 Modelització	4
1.1 Generalització del model	4
1.2 Models en temps continu en forma d'espai d'estats	5
1.3 Models en temps discret en forma d'espai d'estats	7
2 Processos d'estimació	9
2.1 El filtre de Kalman	9
2.2 L'algoritme	10
2.2.1 Fase de predicció de les variables d'estat	10
2.2.2 Fase de predicció de l'observació de la variable d'estat	11
2.2.3 Fase de filtrat i innovació	12
2.3 El filtre de Kalman en temps continu	14
2.4 Estimació Màxim Versemblant	15
3 Cas d'estudi: identificació del model d'un edifici	17
3.1 Descripció de l'edifici	17
3.2 Les dades	17
3.3 Variables d'estat i paràmetres	18
3.4 Eina d'estimació: llibreria CTSM	20
3.4.1 Obtenció del model	20
3.4.2 Interpretació del model	21
3.5 Models d'estudi	22
3.5.1 Model T_i	22
3.5.2 Model $T_i T_e$	23
3.5.3 Model $T_i T_h$	24
3.5.4 Model $T_i T_m$	25
3.5.5 Model $T_i T_e T_h$	26
3.5.6 Model $T_i T_e T_m$	27
3.5.7 Model $T_i T_h T_m$	28
3.5.8 Model $T_i T_e T_h T_m$	29
3.6 Tria del model	30
3.6.1 Test de Raó de la Versemblança	30
3.6.2 Aplicació als diferents models	31
3.6.3 Validació del model	32

3.7	Explotació del model	34
3.7.1	Interpretació del model	34
3.7.2	Filtrat i <i>Smooth</i>	34
3.8	Escenaris deterministes	35
3.8.1	Cas 1: no es tenen inputs	36
3.8.2	Cas 2: es coneix la mitjana de la temperatura ambient	38
4	Conclusions	41
	Bibliografia	44
A	Codi i resultats dels models	45
A.1	Model Ti	47
A.2	Model TiTe	51
A.3	Model TiTh	55
A.4	Model TiTm	60
A.5	Model TiTeTh	64
A.6	Model TiTeTm	69
A.7	Model TiThTm	74
A.8	Model TiTeThTm	80
B	Codi utilitzat en els testos de Raó de la Versemblança	86
B.1	Model Ti vs Model TiTe	86
B.2	Model Ti vs Model TiTh	87
B.3	Model Ti vs Model TiTm	87
B.4	Model TiTh vs Model TiTeTh	88
B.5	Model TiTh vs Model TiThTm	88
B.6	Model TiTeTh vs Model TiTeThTm	89
C	Codi utilitzat per obtenir el filtrat i l'allisat	90
D	Codi utilitzat per obtenir els gràfics en el cas determinista	93
D.1	Cas 1: no es tenen inputs	93
D.2	Cas 2: es coneix la mitjana de la temperatura ambient	94

Índex de figures

3.1.1 Representació de l'edificació estudiada.	17
3.2.1 Representació de les sèries temporals de les dades.	18
3.5.1 Representació del model Ti.	22
3.5.2 Representació del model TiTe.	23
3.5.3 Representació del model TiTh.	24
3.5.4 Representació del model TiTm.	25
3.5.5 Representació del model TiTeTh.	26
3.5.6 Representació del model TiTeTm.	27
3.5.7 Representació del model TiThTm.	28
3.5.8 Representació del model TiTeThTm.	29
3.6.1 Representació dels residus en el model TiTeTh.	33
3.7.1 Representació del filtrat.	35
3.8.1 Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista.	38
3.8.2 Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista considerant temperatura ambient.	40
A.0.1 Representació de les sèries temporals de les dades.	46
A.1.1 Representació dels residus en el model Ti.	49
A.1.2 Representació de les sèries resultants en el model Ti.	50
A.2.1 Representació dels residus en el model TiTe.	54
A.2.2 Representació de les sèries resultants en el model TiTe.	55
A.3.1 Representació dels residus en el model TiTh.	58
A.3.2 Representació de les sèries resultants en el model TiTh.	59
A.4.1 Representació dels residus en el model TiTm.	62
A.4.2 Representació de les sèries resultants en el model TiTm.	64
A.5.1 Representació dels residus en el model TiTeTh.	68
A.5.2 Representació de les sèries resultants en el model TiTeTh.	69
A.6.1 Representació dels residus en el model TiTeTm.	73
A.6.2 Representació de les sèries resultants en el model TiTeTm.	74
A.7.1 Representació dels residus en el model TiThTm.	78
A.7.2 Representació de les sèries resultants en el model TiThTm.	79
A.8.1 Representació dels residus en el model TiTeThTm.	83
A.8.2 Representació de les sèries resultants en el model TiTeThTm.	85
C.0.1 Representació del filtrat.	91
C.0.2 Representació de l'allisat.	92
D.1.1 Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista.	93
D.2.1 Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista considerant temperatura ambient.	94

Índex de taules

2.1.1 Definició de predicció, filtrat i allisat.	9
3.4.1 Valors obtinguts per a cada paràmetre.	21
3.5.1 Resultats obtinguts en el model Ti.	22
3.5.2 Resultats obtinguts en el model TiTe.	23
3.5.3 Resultats obtinguts en el model TiTh.	24
3.5.4 Resultats obtinguts en el model TiTm.	25
3.5.5 Resultats obtinguts en el model TiTeTh.	26
3.5.6 Resultats obtinguts en el model TiTeTm.	27
3.5.7 Resultats obtinguts en el model TiThTm.	28
3.5.8 Resultats obtinguts en el model TiTeThTm.	30
3.6.1 Logaritme del màxim de la funció de versemblança i nombre de paràmetres per a tots els models. .	31
3.6.2 Resultats obtinguts entre el model Ti i els models formats per dues variables d'estat.	31
3.6.3 Resultats obtinguts entre el model TiTh i els models formats per tres variables d'estat.	32
3.6.4 Resultats obtinguts entre el model TiTeTh i el model complet.	32
3.6.5 Resultats obtinguts en el model TiTeTh.	32

Introducció

El sector de l'edificació és, a nivell mundial, el responsable del 40 % del consum d'energia primària. En la situació actual de crisi climàtica, la reducció de l'ús de l'energia és un fet clau necessari per poder aconseguir un nou model energètic que permeti reduir el total d'emissions. En aquest context, i per poder aconseguir edificis més sostenibles i conscienciar la ciutadania, s'han creat, al llarg dels anys, diferents certificacions cada cop més restrictives, que permeten classificar els edificis en funció de les seves característiques energètiques.

Una d'aquestes característiques és la dinàmica de calor de l'edifici, és a dir, les variacions tèrmiques de l'edifici en funció de diferents elements que les poden produir. Així doncs, és necessari poder determinar quins són aquests elements que poden modificar la temperatura interior de l'edifici i determinar el seu efecte, així com poder prendre decisions a nivell tècnic que puguin ajudar a reduir la despesa energètica associada a aquesta dinàmica.

Partint d'aquesta premissa, el següent estudi pretén descriure un mètode per obtenir una informació detallada sobre les dinàmiques de calor d'un edifici i aplicar-lo en unes dades reals, de manera que es pugui analitzar quins elements tenen rellevància en l'evolució de la temperatura interior de l'habitatge i estudiar-ne les diferents relacions.

Els diferents mètodes en la modelització d'edificis es classifiquen en tres aproximacions: els models *white-box*, *black-box* i *grey-box*. La modelització *white-box* es basa en una descripció física molt detallada de l'edifici. Per tant, aquests models produeixen una predicció molt acurada del comportament tèrmic de l'edifici, a partir d'usar un ampli coneixement dels paràmetres i propietats de l'edifici observat. A més, aquests models requereixen simulacions complexes amb alt cost computacional.

Els models *black-box* es basen en l'anàlisi de sèries temporals prèviament mesurades. No requereixen cap coneixement sobre l'estructura física i, a més, tenen costos de desenvolupament molt baixos. Aquests models, però, no permeten capturar efectes no lineals i estan limitats a un cert rang de valors.

La modelització *grey-box* descriu un estadi intermedi entre els dos casos anteriors i explota el coneixement físic per definir l'estructura del model i les seves equacions d'estat i també les equacions de mesura, que permeten relacionar les dinàmiques d'un sistema físic amb dades observades, dades que són necessàries per poder estimar els paràmetres del model. El concepte principal d'aquesta modelització és separar i representar diferents components de l'edifici a partir de resistències (R) i capacitats (C), conceptes anàlegs a la xarxa elèctrica. Per aquest motiu, també es coneixen com a models agrupats RC. L'ordre d'un d'aquests models depèn del nombre de capacitats que consideri.

La modelització que s'usarà en aquest estudi es basa en models *grey-box*. En aquesta, l'estimació dels paràmetres es fonamentarà en dades històriques observades sense considerar cap coneixement previ de les característiques físiques de l'edifici, però sí que es fixaran uns límits en els valors per poder assegurar la plausibilitat física.

L'objectiu principal d'aquest projecte és l'obtenció d'un model *grey-box* que permeti explicar les dinàmiques tèrmiques d'un edifici concret. A partir d'aquesta motivació genèrica, s'han plantejat els objectius específics del treball:

- Estudiar la modelització *grey-box* en el cas estocàstic i diferenciar entre models amb temps discret i continu. Comparar les parts dinàmica i de mesura entre els dos casos.

- Investigar el filtre de Kalman. Entendre quin és el seu objectiu i la metodologia que aplica, així com demostrar els diferents passos que realitza l'algoritme de càlcul en el cas discret. Aprofundir en el cas continu i comprendre les modificacions que aplica.
- Desenvolupar el procés d'estimació màxim versemblant, necessari per obtenir les estimacions dels diferents paràmetres. Relacionar aquesta metodologia amb el filtre de Kalman.
- Aplicar els coneixements teòrics obtinguts en el cas d'un edifici real. Usar la llibreria CTSM del *software* estadístic R per poder obtenir els resultats.
- Seleccionar el model que millor representa la situació d'estudi i interpretar-lo.
- Comparar el model obtingut amb el cas determinista. Desenvolupar i resoldre el sistema d'equacions diferencials ordinàries.

Per poder realitzar aquest projecte, s'han seguit dues vies de treball diferents. Per una banda, han estat necessàries la documentació i investigació, a partir d'articles i altres elements bibliogràfics, per poder desenvolupar la part teòrica del projecte. La majoria d'aquestes referències bibliogràfiques tracten models de dinàmica de calor en els edificis i, a més, per poder entendre correctament tots els processos relacionats amb l'estimació de paràmetres, el filtre de Kalman i l'estimació màxim versemblant, s'ha usat documentació acadèmica avançada en termes d'Estadística i Probabilitat.

Per altra banda, s'han utilitzat el *software* estadístic R i la llibreria CTSM per poder obtenir els paràmetres estimats, per a cada un dels models estudiats, a partir de les dades observades de l'edifici. A més, també s'han usat eines gràfiques per representar els resultats obtinguts i poder realitzar una millor interpretació.

El següent treball es divideix en tres capítols principals:

- **Capítol 1: Modelització.** En aquest capítol es presenten les diferents modelitzacions possibles, diferenciant especialment entre els casos que s'utilitza el temps discret o el continu. A més, es defineixen la part dinàmica i la de mesura, així com tots aquells elements que les formen. També s'estudia la linealitat i el caràcter gaussià del model, per poder aplicar més endavant eines d'estimació que requereixin aquestes característiques.
- **Capítol 2: Processos d'estimació.** En aquest capítol s'introdueixen diferents metodologies emprades a l'hora de realitzar l'estimació dels paràmetres. Aquesta es duu a terme mitjançant l'estimació màxim versemblant, que és aquell procés que busca els valors que maximitzen el logaritme de la funció de versemblança. Al mateix temps, aquest mètode usa el filtre de Kalman, un algoritme que permet estimar variables d'estat no observables a partir de variables observables que poden contenir algun error en la mesura. Es presenten també les versions en temps discret i continu d'aquest algoritme.
- **Capítol 3: Cas pràctic.** En aquest capítol s'estudia un cas basat, en dades reals, d'un edifici holandès, en el qual es van mesurar les dades entre el dia 1 de gener de 2018 fins al dia 17 de gener a les 7 de la tarda. Es presenta el model estudiat i s'introdueixen les variables d'estat analitzades i els paràmetres estimats. A més, també s'explica l'eina informàtica utilitzada per dur a terme aquest procés. S'introdueix la tria del model escollit i la interpretació d'aquest, així com diferents resultats obtinguts amb l'explotació del model. A més, es realitza la comparativa entre el model resultant i la versió determinista.

En últim lloc, la memòria conclou amb una síntesi de tot el treball i amb l'explicació de les conclusions obtingudes en funció dels objectius plantejats en aquest inici.

Finalment, i fent referència als motius personals que van condicionar la tria del projecte, aquest m'ha donat l'oportunitat per poder aplicar conceptes de moltes de les àrees estudiades en el Grau de Matemàtiques, com són les Equacions Diferencials Ordinàries, Informàtica o Probabilitat. A més, també m'ha donat l'opció de poder utilitzar el *software* estadístic R, la principal eina informàtica que s'utilitza en el Grau d'Estadística, en el què estic graduat. Així doncs, la possibilitat de poder introduir nocions d'ambdós graus va ser una de les principals motivacions a l'hora d'escollir aquest projecte. A més, aquest estudi m'ha permès aplicar resultats de les branques de la ciència matemàtica que més capten la meva atenció, així com ampliar els coneixements en aquestes.

1. Modelització

En aquesta secció es presentarà el model en temps continu que s'ha escollit per aplicar a les diferents dades. Per fer-ho, primer s'introduirà el model general i, seguidament, s'especificaran les adaptacions d'aquest segons si la configuració és en temps continu o el discret. Es definiran també els termes de part dinàmica i part de mesura i s'especificaran les condicions que ha de complir el model per poder-hi aplicar processos d'estimació de paràmetres.

1.1 Generalització del model

Els diferents models que es plantejaran a continuació estaran formats per una part dinàmica i una altra de mesura. La dinàmica descriu les diferents maneres com les variables d'estat varien al llarg del temps, mentre que la part de mesura retrata les relacions entre el conjunt de variables observades i el conjunt de variables d'estat en un moment específic de temps. En aquells casos que es tractin models de règim múltiple, el model general també inclou dos models de regressió logística multinomial que controlen, respectivament, les probabilitats del règim inicial i les probabilitats de transició entre règims. Tant els models dinàmics com de mesura, a més, poden mostrar propietats que depenguin del règim. Tot i així, en aquest estudi només es considerarà un sol règim.

El model dinàmic pot formar-se per funcions que considerin el temps continu o el discret. En ambdós casos, es podrà diferenciar una part determinista i una altra d'estocàstica.

La part dinàmica, considerant temps continu, és de la forma:

$$dT(t) = f(T(t), t, U(t))dt + d\omega(t), \quad (1.1.1)$$

on t fa referència al temps, $T(t)$ és un vector $r \times 1$ de les variables d'estat al temps t , $U(t)$ és el vector amb les variables exògenes al temps t i $f(\Delta)$ és el vector de funcions dinàmiques (segurament no lineals). El conjunt d'aquests elements formen la part determinista del model.

A la banda esquerra de la igualtat 1.1.1, $dT(t)$, es dona el diferencial del vector de les variables d'estat contínues, $T(t)$. Així, els canvis que succeeixen en el vector d'aquestes variables s'especifiquen com a funcions sobre les mateixes variables d'estat, variables exògenes i el temps. Aquestes funcions, que s'expressen com a $f(\Delta)$, es coneixen normalment com a funcions de deriva en la literatura d'equacions diferencials estocàstiques. A més d'aquestes modificacions deterministes que aporten les funcions de deriva, també hi ha els $\omega(t)$, que són uns processos de Wiener ¹ r -dimensionals i que conformen la part estocàstica del model. Els diferencials d'aquests processos de Wiener tenen mitjana 0 i matriu de covariàncies Q , que normalment s'anomena matriu de difusió.

Pels processos en temps discret, s'adopta el model dinàmic en forma d'espai d'estat com a [3]

$$T(t_{j+1}) = f(T(t_j), t_j, U(t_j)) + \omega(t_{j+1}), \quad (1.1.2)$$

on ara es desplega a diferents punts discrets de temps, indexats per una seqüència positiva de valors enters de t . Aquest model és en forma d'equació de diferència, que s'acostuma a veure en models d'espai d'estat en temps discret. La part determinista del model s'identifica similarment al cas en temps continu. Pel que fa a la part estocàstica, $\omega(t)$ denota un vector de processos de soroll que segueixen una distribució Normal

¹Un procés de Wiener és un procés estocàstic en temps continu. És l'analogia en el cas discret de la component estocàstica.

amb matriu de covariàncies Q . Tant en el cas discret com en el continu, en les equacions 1.1.1 i 1.1.2, les funcions $f(\Delta)$ són les que s'anomenaran funcions dinàmiques².

En ambdós casos, les condicions inicials per a les funcions dinàmiques es defineixen explícitament per ser les variables d'estat en un específic punt inicial de temps, t_0 ³, nomenades $T(t_0)$. Concretament, segueixen una distribució Normal amb mitjana μ_{T0} i matriu de covariàncies Σ_{T0} :

$$T(t_0) \sim N(\mu_{T0}, \Sigma_{T0}). \quad (1.1.3)$$

Tant en el cas del model en temps discret com en el de temps continu, s'assumeix que les variables d'estat s'han mesurat únicament en temps discrets. Això implica que les variables d'estat poden existir en temps discret o continu, però les observacions només passen en punts seleccionats de temps discret. Així doncs, es té un model de mesura en temps discret en el qual $T(t_j)$ en l'instant t_j s'indica amb un vector de longitud p d'observacions, $Y(t_j)$. Generalment, en processos de temps continu, els intervals de temps $\Delta_j = t_{j+1} - t_j$ poden ser desiguals, mentre que en els processos de temps discret han de ser uniformes.

El vector de les observacions està lligat a les variables d'estat a partir de

$$Y(t_j) = \Lambda T(t_j) + AU(t_j) + \epsilon(t_j), \quad (1.1.4)$$

$$\epsilon(t_j) \sim N(0, R), \quad (1.1.5)$$

on A és una matriu amb els pesos de la regressió per a cada variable exògena observada en el temps t_j , Λ és una matriu de dimensió $p \times r$ amb les càrregues dels factors que relaciona les variables observades amb les variables d'estat, i $\epsilon(t_j)$ és un vector d'errors de mesura que s'assumeix que no estan correlacionats amb el temps i distribuïts segons una distribució Normal amb mitjana 0 i matriu de covariàncies R .

1.2 Models en temps continu en forma d'espai d'estats

Primerament, es considerarà el cas en temps continu, ja que el discret derivarà d'aquest.

S'acostuma a proposar una descripció agrupada d'un sistema dinàmic, incloent les dinàmiques de transferència de calor d'un edifici que, freqüentment, es descriuen a partir d'un sistema d'equacions diferencials lineals. Utilitzant la notació matricial, les equacions es poden parametritzar pel model determinístic lineal en temps continu com:

$$\frac{dT}{dt} = AT + BU, \quad (1.2.1)$$

on T és el vector que inclou les variables d'estat i U el vector que conté les dades (*input*). El comportament dinàmic del sistema es caracteritza per la matriu A , i la matriu B especifica com els senyals de l'*input* (temperatura exterior de l'aire, radiació solar, subministrament de calor, etc.) entren al sistema.

Tot i així, l'equació 1.2.1 no és capaç de predir el futur comportament dels diferents estats acuradament. Per descriure la desviació entre aquesta equació i la variació real dels estats, cal incloure un terme additiu

²La funció dinàmica també es pot conèixer com a funció de transició o funció d'estat.

³Notació utilitzada per indicar que és la primera observació en el temps.

de soroll, que serà la part estocàstica. Aleshores, el model de transferència dinàmica de calor es descriu pel model estocàstic lineal d'espai d'estats en temps continu següent:

$$dT = ATdt + BUdt + d\omega(t), \quad (1.2.2)$$

on el procés $\omega(t)$ estocàstic m-èssim s'assumeix que és amb increments independents. Els motius per incloure aquest element de soroll són:

- Deficiències del model. Per exemple, el comportament dinàmic, descrit per la matriu A en l'equació 1.2.2, podria ser una aproximació al sistema real.
- *Inputs* no reconeguts. Algunes variables que no es consideren podrien afectar el sistema.
- Les mesures dels *inputs* poden veure's afectades pel soroll. En aquests casos, els valors mesurats s'interpreten com a l'*input* del sistema, i la desviació que hi ha vers l'*input* real es descriu amb $\omega(t)$.

Fent referència a la secció 1.1, la funció dinàmica d'aquest model en temps continu és:

$$f(T(t), t, U(t)) = AT(t) + BU(t). \quad (1.2.3)$$

L'equació 1.2.2 descriu la transferència de tots els estats del sistema, però només alguns dels estats es mesuren realment. En el cas lineal, s'assumeix que únicament es mesura una combinació lineal dels estats i que, si s'introdueix Y per denotar les variables mesurades, es pot escriure:

$$Y(t) = CT(t) + \epsilon(t), \quad (1.2.4)$$

on C és una matriu constant, que especifica la combinació lineal dels estats que es mesuren realment. Frequentment, a la pràctica, aquesta matriu selecciona només els estats que es mesuren.

El terme $\epsilon(t)$ és la mesura d'error. És necessari considerar-lo, ja que els sensors que fan les mesures són sensibles a sorolls i desviacions. Normalment, s'assumeix que $\epsilon(t)$ és una seqüència de soroll blanc. A més, també se suposa que $\omega(t)$ i $\epsilon(t)$ són mútuament independents. Tot i així, l'error de mesura pot consistir tant en errors sistemàtics com en errors aleatoris, tal i com s'especifica en la ISO [6]. En modelització estadística, l'error aleatori es pot tenir en compte allargant l'experiment. Per altra banda, l'error sistemàtic és més complicat. Idealment, escollint aleatòriament experiments calibrats de forma individual, aquests haurien de repetir aquest error.

Aquest és el model base a partir del qual s'aplicaran les dades més endavant. Tal i com s'ha pogut observar, és un model lineal i Gaussià, fet necessari per poder aplicar el filtre de Kalman.

1.3 Models en temps discret en forma d'espai d'estats

Normalment s'usa el mètode de les diferències finites per transformar equacions diferencials en equacions de diferències. Tot i així, en la situació que s'està estudiant, on el sistema s'assumeix que ve descrit per les equacions diferencials estocàstiques 1.2.2, és analíticament possible realitzar la integració analítica, que sota algunes suposicions especifica precisament el sistema d'equacions en temps discret.

Pel model en temps continu 1.2.2, el model en temps discret corresponent s'obté integrant les equacions diferencials en l'interval de la mostra $[t, t + \tau]$. Així, la versió associada a l'equació 1.2.2 es pot escriure com a:

$$T(t + \tau) = e^{A(t+\tau-t)} T(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} B U(s) ds + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} d\omega(s). \quad (1.3.1)$$

Sota la suposició que $U(t)$ és constant en l'interval de mostra, aleshores 1.3.1 es pot escriure com al model següent de temps discret en forma d'estat d'espai:

$$T(t + \tau) = \phi(\tau) T(t) + \Gamma(\tau) U(t) + \nu(t; \tau), \quad (1.3.2)$$

on:

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= e^{A\tau}, \\ \Gamma(\tau) &= \int_0^\tau e^{As} B ds, \\ \nu(t; \tau) &= \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} d\omega(s), \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Si l'*input* no és constant en l'interval de mostra, aleshores es poden usar altres mètodes (veure [11]).

Analitzant la part estocàstica del model i assumint que $\omega(t)$ és un procés de Wiener, es defineix $\nu(t; \tau)$ com a un soroll blanc, és a dir, distribuït segons una Normal de mitjana 0 i covariància

$$R_1(\tau) = E[\nu(t; \tau) \nu(t; \tau)']. \quad (1.3.4)$$

Fent referència a la secció 1.1, la funció dinàmica d'aquest model en temps discret és:

$$f(T(t), t + \tau, U(t)) = e^{A\tau} T(t) + U(t) \int_0^\tau e^{As} B ds. \quad (1.3.5)$$

La forma d'espai d'estat total inclou l'equació de mesura, que en aquest cas coincideix amb la de temps continu:

$$Y(t) = CT(t) + \epsilon(t). \quad (1.3.6)$$

Si el temps de mostratge és constant (observacions equiespaides), l'equació estocàstica de les diferències es pot reescriure com a:

$$T(t + 1) = \phi T(t) + \Gamma U(t) + \nu(t), \quad (1.3.7)$$

on l'escala del temps s'ha transformat de tal manera que el temps de mostratge és igual a una unitat de temps.

Comparant amb el model de temps continu es pot observar que:

- La interpretació física directa dels paràmetres s'ha perdut.
- Normalment s'acostuma a necessitar un nombre superior de paràmetres, fet que implica menor eficiència i robustesa.
- S'assumeix que les dades són equidistants i, com a conseqüència, es perd la possibilitat de variar el temps de mostratge.

2. Processos d'estimació

En aquesta secció es presentaran el filtre de Kalman i l'estimació Màxim Versemblant, els dos processos d'estimació de paràmetres que s'usaran. També s'introduirà una versió del filtre de Kalman que utilitza temps continu, que és la que s'ha aplicat per tractar les dades.

2.1 El filtre de Kalman

A continuació es presentarà el filtre de Kalman, un dels mètodes que s'usarà per poder realitzar l'estimació de paràmetres en el model. Per poder-lo aplicar, cal que el model sigui lineal i Gaussià que, com s'ha pogut observar en seccions anteriors, és el cas del model que s'està tractant. El filtre de Kalman pot utilitzar-se tant en els casos en temps discret com en temps continu, ambdós explicats seguidament.

El filtre de Kalman és un algoritme que permet estimar variables d'estat no observables a partir de variables observables, que poden contenir algun error en la mesura. Aquest algoritme requereix dos tipus d'equacions: les que relacionen les variables d'estat amb les variables observables (equacions de mesura, 1.2.4) i les que determinen l'estructura temporal de les variables d'estat (equacions dinàmiques, 1.2.2).

Aquest algoritme es divideix en dues etapes principals:

1. Etapa de predicció: s'estimen les variables d'estat utilitzant les equacions dinàmiques.
2. Etapa de correcció: es millora aquesta primera predicció utilitzant la informació de les variables observables, és a dir, mitjançant l'equació de mesura.

Una característica important d'aquest algoritme és el seu caràcter recursiu. Una vegada que el filtre de Kalman pronostica el nou estat en el moment t , s'afegeix un terme de correcció i el nou estat "corregit" serveix com a condició inicial per a l'etapa següent, la $t + 1$. D'aquesta manera, l'estimació de les variables d'estat utilitza tota la informació disponible fins al moment, i no només la informació fins a l'etapa anterior al punt en el qual es realitza l'estimació.

Per altra banda, és necessari també diferenciar entre tres casos diferents: la predicció, el filtrat i l'allisat (*smooth*). L'objectiu és estimar el valor en el moment t per a la variable d'estat T , que s'escriu T_t . A més, es tenen s valors observats d'aquesta variable, que s'anomenen Y_1, \dots, Y_s . Segons el nombre d'observacions que es tinguin i el valor de t , es diferencien els tres casos que venen definits a la taula 2.1.1.

Nom	Característica
Predicció	Quan $s < t$.
Filtrat	Quan $s = t$.
Allisat	Quan $s > t$.

Taula 2.1.1: Definició de predicció, filtrat i allisat.

Fent referència a les dues etapes anteriorment mencionades en les quals es divideix el filtrat de Kalman, s'usaran la predicció i el filtrat respectivament.

2.2 L'algoritme

Per poder explicar el funcionament de l'algoritme del filtre de Kalman, primerament cal recordar els diferents elements a considerar.

Per una banda, es disposa d'un seguit d'observacions de la variable d'estat, que s'anomenen Y_1, \dots, Y_n . Per altra banda, cal recordar el model que s'està estudiant, format per una part dinàmica

$$dT = ATdt + BUdt + d\omega(t), \quad (2.2.1)$$

on el procés $\omega(t)$ és un soroll blanc amb matriu de variàncies i covariàncies Q , és a dir:

$$\omega(t) \sim N(0, Q). \quad (2.2.2)$$

A més, el model també està format per una equació de mesura

$$Y(t) = CT(t) + \epsilon(t), \quad (2.2.3)$$

on el procés $\epsilon(t)$ és un soroll blanc amb matriu de variàncies i covariàncies R , és a dir:

$$\epsilon(t) \sim N(0, R). \quad (2.2.4)$$

L'objectiu es basa en obtenir aproximacions dels valors reals de les variables d'estat pel temps t , és a dir T_t , a partir de les observacions que s'han fet d'aquesta, Y_1, \dots, Y_n , així com de la mesura d'incertesa (variabilitat).

Es partirà de les condicions inicials definides en l'apartat 1.1

$$T(t_0) \sim N(\mu_{T0}, \Sigma_{T0}), \quad (2.2.5)$$

que són les que fan referència al primer espai temporal, és a dir, $t = 0$. Utilitzant la notació que es presentarà més endavant, s'escriuran $\mu_{T0} \equiv T_{0|0}$ i $\Sigma_{T0} \equiv P_{0|0}$.

Seguidament, per a cada $t \in \{1, \dots, n\}$ cal realitzar tres fases, fins a haver obtingut els n valors de les variables d'estat.

2.2.1 Fase de predicció de les variables d'estat

Definició 2.1. El valor esperat de la predicció a un pas de T_t es defineix com a

$$T_{t|t-1} = E(T_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1). \quad (2.2.6)$$

Definició 2.2. La variància de la predicció a un pas de T_t es defineix com a

$$P_{t|t-1} = V(T_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1). \quad (2.2.7)$$

Proposició 2.3. En la fase de predicció de les variables d'estat cal calcular els valors $T_{t|t-1}$ i $P_{t|t-1}$ a partir de l'equació 2.2.1, és a dir:

$$T_{t|t-1} = AT_{t-1|t-1} + BU_t \quad (2.2.8)$$

i

$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A' + Q. \quad (2.2.9)$$

Demostració. Per demostrar els resultats tan sols cal aplicar les equacions dinàmica i de mesura. Per fer-ho, és necessari recordar que l'esperança d'una constant és la constant i que la seva variància és zero. A més, cal tenir present que $\epsilon(t)$ i $\omega(t)$ tenen esperança nul·la i una matriu de variàncies i covariàncies respectivament.

Usant l'equació dinàmica 2.2.1 s'obtenen els resultats de la fase de predicció de la variable d'estat:

$$T_{t|t-1} = E(T_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1) = AE(T_{t-1} | Y_{t-1}, \dots, Y_1) + BU + E(\omega(t)) = AT_{t-1|t-1} + BU$$

i

$$P_{t|t-1} = V(T_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1) = AE(T_{t-1} | Y_{t-1}, \dots, Y_1)A' + V(\omega(t)) = AP_{t-1|t-1}A' + Q.$$

□

2.2.2 Fase de predicció de l'observació de la variable d'estat

Definició 2.4. El valor esperat de l'observació a un pas de Y_t es defineix com a

$$Y_{t|t-1} = E(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1). \quad (2.2.10)$$

Definició 2.5. La variància de l'observació a un pas de Y_t es defineix com a

$$F_{t|t-1} = E(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1). \quad (2.2.11)$$

Proposició 2.6. En la fase de predicció de l'observació de la variable d'estat cal calcular els valors $Y_{t|t-1}$ i $F_{t|t-1}$ a partir de l'equació 2.2.3, és a dir:

$$Y_{t|t-1} = CT_{t|t-1} \quad (2.2.12)$$

i

$$F_{t|t-1} = CP_{t|t-1}C' + R. \quad (2.2.13)$$

Demostració. Per demostrar els resultats tan sols cal aplicar les equacions dinàmica i de mesura. Per fer-ho, és necessari recordar que l'esperança d'una constant és la constant i que la seva variància és zero. A més, cal tenir present que $\epsilon(t)$ i $\omega(t)$ tenen esperança nul·la i una matriu de variàncies i covariàncies respectivament.

Usant l'equació de mesura 2.2.3 s'obtenen els resultats de la fase de predicció de l'observació de la variable d'estat:

$$Y_{t|t-1} = E(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1) = CE(T_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1) + E(\epsilon(t)) = CT_{t|t-1}$$

i

$$F_{t|t-1} = V(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1) = CE(T_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1)C' + V(\epsilon(t)) = CP_{t|t-1}C' + R.$$

□

2.2.3 Fase de filtrat i innovació

Definició 2.7. La innovació, $e(t)$, es defineix com a la variació entre la mesura observada i la predita, és a dir,

$$e_t = Y_t - Y_{t|t-1}. \quad (2.2.14)$$

Definició 2.8. El guany de Kalman es defineix com a

$$K_t = (P_{t|t-1}C')[F_{t|t-1}]^{-1} = (P_{t|t-1}C')[CP_{t|t-1}C' + R]^{-1}. \quad (2.2.15)$$

Definició 2.9. El valor esperat del filtrat es defineix com a

$$T_{t|t} = E(T_t | Y_t, \dots, Y_1). \quad (2.2.16)$$

Definició 2.10. La variància del filtrat es defineix com a

$$P_{t|t} = V(T_t | Y_t, \dots, Y_1). \quad (2.2.17)$$

Observació 2.11. En el cas Gaussià, l'esperança condicionada té una forma especial. Sigui $y = (y_1, \dots, y_m)'$ i $x = (x_1, \dots, x_n)'$ dues variables que se suposa que, conjuntament, segueixen la distribució Normal:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \sim N_{m+n} \left[\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} \right] \quad (2.2.18)$$

on $y | x$, la distribució de y condicionada a x , segueix una Normal que té per mitjana i variància:

$$\mu_{y|x} = \mu_y + \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \quad (2.2.19)$$

$$\Sigma_{y|x} = \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}, \quad (2.2.20)$$

on s'assumeix que Σ_{xx} no és singular.

Proposició 2.12. En la fase de filtrat i innovació cal calcular els valors $T_{t|t}$ i $P_{t|t}$, és a dir, obtenir el valor esperat de la variable d'estat en el temps t i la seva variància. Per fer-ho, s'usen les fórmules següents:

$$T_{t|t} = T_{t|t-1} + K_te_t \quad (2.2.21)$$

i

$$P_{t|t-1} = (Id - K_tC)P_{t|t-1}. \quad (2.2.22)$$

Demostració. Per poder calcular les equacions 2.2.21 i 2.2.22 seran necessaris els conceptes d'innovació i guany de Kalman.

Per poder obtenir l'equació 2.2.21, cal observar com $\text{cov}(e_t, Y_s) = 0$ per a $s < t$, ja que considerant que la seqüència d'innovacions és un procés Gaussià, implica que aquestes innovacions són independents d'observacions anteriors. A més, la covariància condicionada de la variable d'estat T_t i e_t respecte les observacions Y_1, \dots, Y_{t-1} és:

$$\begin{aligned} \text{cov}(T_t, e_t \mid Y_1, \dots, Y_{t-1}) &= \text{cov}(T_t, Y_t - CT_{t|t-1} \mid Y_1, \dots, Y_{t-1}) \\ &= \text{cov}(T_t - T_{t|t-1}, Y_t - CT_{t|t-1} \mid Y_1, \dots, Y_{t-1}) \\ &= \text{cov}(T_t - T_{t|t-1}, C(T_t - T_{t|t-1}) + e_t) \\ &= P_{t|t-1}C'. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Utilitzant aquests resultats s'obté que la distribució condicionada de T_t i e_t donats Y_1, \dots, Y_{t-1} és la Normal

$$\begin{pmatrix} T_t \\ e_t \end{pmatrix} \mid Y_1, \dots, Y_{t-1} \sim N \left(\begin{bmatrix} T_{t|t-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{t|t-1} & P_{t|t-1}C' \\ CP_{t|t-1} & F_{t|t-1} \end{bmatrix} \right). \quad (2.2.24)$$

Aleshores, fent servir l'observació 2.11 es pot escriure:

$$\begin{aligned} T_{t|t} &= E(T_t \mid Y_{t-1}, \dots, Y_1) = E(T_t \mid Y_{t-1}, \dots, Y_1, e_t) \\ &= T_{t|t-1} + (P_{t|t-1}C')(F_{t|t-1})^{-1}(e_t - 0) \\ &= T_{t|t-1} + (P_{t|t-1}C')(F_{t|t-1})^{-1}e_t \\ &= T_{t|t-1} + K_t e_t, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

que és l'equació 2.2.21, on s'ha usat la definició del guany de Kalman:

$$K_t = (P_{t|t-1}C')[F_{t|t-1}]^{-1} = (P_{t|t-1}C')[CP_{t|t-1}C' + \mathbf{R}]^{-1} \quad (2.2.26)$$

Finalment, per poder obtenir 2.2.22 es té

$$\begin{aligned} P_{t|t} &= \text{cov}(T_t \mid Y_{t-1}, \dots, Y_1, e_t) \\ &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1}C'P_t^{-1}CP_{t|t-1} \\ &= (Id - C'P_t^{-1}CP_{t|t-1})P_{t|t-1} \\ &= (Id - K_t C)P_{t|t-1}. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

□

2.3 El filtre de Kalman en temps continu

Tal i com ja s'ha mencionat, el filtre de Kalman anteriorment introduït es basa en l'ús d'espais temporals equidistants, que és el que es coneix com a filtre de Kalman en temps discret. Seguidament, es pretén presentar breument quines serien les variacions en el cas continu, és a dir, considerant que cada interval de temps fos d'una longitud diferent respecte l'anterior.

En aquest cas, es veurien modificades les equacions de predicció de les variables d'estat, ja que es tractarien unes equacions en derivades parcials:

$$\frac{dT_{t|k}}{dt} = f(T_{t|k}, u_t, \Theta) \quad (2.3.1)$$

i

$$\frac{dP_{t|k}}{dt} = AP_{t|k} + P_{t|k}A^T + \sigma\sigma^T, \quad (2.3.2)$$

que caldria resoldre per a $t \in [t_k, t_{k+1}[$ utilitzant les mateixes condicions inicials que anteriorment. En aquestes equacions s'ha fet servir la notació següent:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial T_t} \right|_{T_{k|k-1}, u_k, t_k, \Theta}, \quad (2.3.3)$$

$$\sigma = \sigma(u_k, t_k, \Theta).$$

Tot i així, i malgrat que el cas que s'està tractant és el lineal, el filtre de Kalman és sensible a efectes no lineals, fet que provoca que la solució obtinguda resolent 2.3.1 i 2.3.2 no sigui del tot exacta. Per aquest motiu i per poder obtenir millors aproximacions, l'interval de temps $[t_k, t_{k+1}[$ se subdivideix, és a dir, $[t_k, \dots, t_j, \dots, t_{k+1}[$, i les equacions es linealitzen per a cada subinstant. Així doncs, les solucions numèriques de 2.3.1 i 2.3.2 es poden simplificar aplicant solucions analítiques a les equacions linealitzades de propagació corresponents, donades per:

$$\frac{dT_{t|j}}{dt} = f_0 + A(T_t - T_j) + B(u_t - u_j) \quad (2.3.4)$$

i

$$\frac{dP_{t|j}}{dt} = AP_{t|j} + P_{t|j}A^T + \sigma\sigma^T \quad (2.3.5)$$

que caldria resoldre per a $t \in [t_j, t_{j+1}[$. En aquestes equacions s'hi ha aplicat la següent notació:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial T_t} \right|_{T_{j|j-1}, u_j, t_j}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u_t} \right|_{T_{j|j-1}, u_j, t_j}, \quad (2.3.6)$$

$$f_0 = f(T_{j|j-1}, u_j, t_j), \quad \sigma = \sigma(u_k, t_k).$$

Les solucions analítiques són:

$$T_{j+1|j} = T_{j|j} + A^{-1}(\Phi_s - I)f_0 + (A^{-1}(\Phi_s - I) - I\tau_s)A^{-1}B\alpha \quad (2.3.7)$$

i

$$P_{j+1|j} = \Phi_s P_{j|j} \Phi_s^T + \int_0^{\tau_s} e^{As} \sigma \sigma^T e^{As^T} ds, \quad (2.3.8)$$

on es considera $\tau_s = t_{j+1} - t_j$ i $\Phi_s = e^{A\tau_s}$. A més, s'ha introduït el terme $\alpha = \frac{u_{j+1} - u_j}{t_{j+1} - t_j}$ per permetre la suposició tant de retenció d'ordre zero ($\alpha = 0$) com d'ordre primer ($\alpha \neq 0$) en els *inputs* entre instants de mostreig.

Aquest mètode és el que està implementat a la llibreria de R que s'utilitzarà.

2.4 Estimació Màxim Versemblant

En aquest apartat es pretén aconseguir l'estimació dels diferents paràmetres necessaris en el model d'estudi, que són

$$\Theta = (A, B, C, Q, R), \quad (2.4.1)$$

on A i B són les matrius que s'usen en la part dinàmica del model, la matriu C és la que es fa servir en la part de mesura del model i, finalment, Q i R són les matrius de variàncies i covariàncies dels sorolls blancs $\omega(t)$ i $\epsilon(t)$ respectivament.

Per poder realitzar aquesta estimació és necessari recordar els conceptes de funció de versemblança i d'estimacions màxim versemblants.

Definició 2.13. Sigui X_1, \dots, X_n una mostra aleatòria d'una població X amb una funció de probabilitat P_Θ (o una funció de densitat f_Θ). Per a cada mostra particular (x_1, \dots, x_n) , la funció de versemblança es defineix com a la funció de probabilitat (o densitat) conjunta de (X_1, \dots, X_n) avaluada en (x_1, \dots, x_n) .

- Si X és discreta, la funció de versemblança és:

$$L(\Theta) = L(x_1, \dots, x_n) = P_\Theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n). \quad (2.4.2)$$

- Si X és contínua, la funció de versemblança és:

$$L(\Theta) = L(x_1, \dots, x_n) = f_\Theta(x_1, \dots, x_n). \quad (2.4.3)$$

Observació 2.14. La notació $L(\Theta)$ indica que L és una funció de Θ i no de (x_1, \dots, x_n) .

Observació 2.15. Θ pot ser un escalar o un vector.

Observació 2.16. El subíndex Θ en la funció de probabilitat o de densitat indica que aquesta funció depèn del conjunt de paràmetres.

Definició 2.17. Sigui X_1, \dots, X_n una mostra aleatòria d'una població X amb una funció de versemblança $L(\Theta)$. Per a cada mostra particular (x_1, \dots, x_n) , l'estimació màxim versemblant de Θ és el valor Θ_{MV} que maximitza la versemblança, és a dir:

$$L(x_1, \dots, x_n; \widehat{\Theta}_{MV}) = \arg \max L(x_1, \dots, x_n; \Theta). \quad (2.4.4)$$

A partir del model definit anteriorment, on la part dinàmica era l'equació 2.2.1 i l'equació de mesura la 2.2.3, es pretén obtenir les estimacions màxim versemblants dels paràmetres desconeguts, a partir de trobar aquells valors de Θ que maximitzin la funció de versemblança d'una seqüència donada d'observacions, que és el conjunt Y_1, \dots, Y_n .

Així doncs, la funció de versemblança és la funció de densitat de probabilitat disjunta:

$$\begin{aligned} L(\Theta; Y_1, \dots, Y_n) &= f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(Y_1, \dots, Y_n; \Theta) \\ &= f(Y_1; \Theta) f(Y_2 | Y_1; \Theta) \dots f(Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1; \Theta) \\ &= \left(\prod_{k=2}^n f(Y_k | Y_{k-1}, \dots, Y_1; \Theta) \right) f(Y_1; \Theta). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Seguidament, es realitzarà un canvi de variable, de manera que es pretén definir la funció de versemblança utilitzant les innovacions. Emprant el filtre de Kalman, cal obtenir els valors per a $Y_{k|k-1}$ i $F_{t|t-1}$, de manera que s'aconseguirà el següent vector d'innovacions:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 - Y_{1|0} \\ Y_2 - Y_{2|1} \\ \dots \\ Y_n - Y_{n|n-1} \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

on, $e_i \sim N(0, F_{t|t-1}, \forall i \in 1, \dots, n$ i, a més, $e_i \perp e_j, \forall i, j \in 1, \dots, n, i \neq j$.

Així doncs, realitzant aquest canvi de variables s'obté:

$$L(\Theta; e_1, \dots, e_n) = \left(\prod_{k=1}^n f(e_k; \Theta) \right). \quad (2.4.7)$$

Seguidament, es buscarà l'expressió de la funció de versemblança. Per fer-ho, cal considerar l'observació següent:

Observació 2.18. Sigui X una variable aleatòria que segueix una distribució Normal amb mitjana μ i variància σ^2 . Aleshores, la funció de densitat de probabilitat és:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.4.8)$$

Així doncs, el logaritme de la funció de versemblança és:

$$\begin{aligned} \log L(\Theta; e_1, \dots, e_n) &= \sum_{i=1}^n \log f(e_i; \Theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |F_{t|t-1}| - \frac{e_i^T F_{t|t-1}^{-1} e_i}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Finalment, per trobar els estimadors màxim versemblants caldrà buscar els paràmetres que facin mínim el valor de la funció anterior. Per fer-ho, es pot utilitzar el mètode de Newton-Raphson, obtenint les derivades amb aproximacions numèriques.

3. Cas d'estudi: identificació del model d'un edifici

Aquesta secció s'inicia amb una descripció de l'edifici i amb la introducció de les dades que s'han recopilat i els diferents paràmetres i variables usats en els models. Després d'haver presentat la llibreria CTSM, eina utilitzada per realitzar l'estudi següent, es plantejaran els diferents models analitzats, incloent una representació gràfica i els resultats per a cadascun d'ells. També es presentarà el test de raó de versemblança, usat per escollir el millor model de tots, i la selecció realitzada. Fent referència a l'explotació del model triat, s'introduiran els resultats obtinguts amb el filtrat i l'allisat, així com la interpretació física dels paràmetres. Finalment, es realitzarà el càlcul de la solució en el cas determinista i es compararà amb el resultat estocàstic obtingut.

3.1 Descripció de l'edifici

Les dades que s'usaran en les seccions següents s'han obtingut de la casa 2 del carrer Noordbrabantstraat, del municipi d'Enschede, situat a la província d'Overijssel, al centre-est dels Països Baixos.

Aquesta edificació, amb una superfície de 126 m^2 i construïda el 2017, està situada en un barri residencial. A la figura 3.1.1 es pot observar la representació d'algunes de les vivendes d'aquesta ubicació.



Figura 3.1.1: Representació de l'edificació estudiada.

Fent referència a les característiques energètiques de l'edifici, disposa d'un servidor que permet controlar tots els calefactores elèctrics. Per mesurar la temperatura interior s'ha utilitzat un sensor Hobo U12-012, situat al mig de cada habitació. A més, prop de l'habitatge hi ha una estació climàtica que ha servit per obtenir la temperatura ambient i la radiació global. Finalment, és necessari mencionar que aquest edifici disposa de la Qualificació Energètica A.

3.2 Les dades

L'estudi següent es basa en dades recopilades durant un seguit d'observacions dutes a terme des del dia 1 de gener de 2018 a les 01:00 hores fins al dia 17 de gener de 2018 a les 19:00 hores. Les sèries temporals següents consisteixen en valors mesurats cada hora de les variables:

- Y (yTi en les dades): temperatura interior de la sala mesurada. Es mesura en $^{\circ}\text{C}$.
- Φ_h (Ph en les dades): quantitat de calor total de tots els escalfadors elèctrics de l'edifici. Es mesura en kW .

- T_a (Ta en les dades): temperatura ambient mesurada en una estació climàtica. Es mesura en $^{\circ}C$.
- Φ_s (Ps en les dades): radiació global mesurada en una estació climàtica. Es mesura en W/m^2 .

Les representacions de les sèries temporals de les dades es poden observar en la figura 3.2.1.

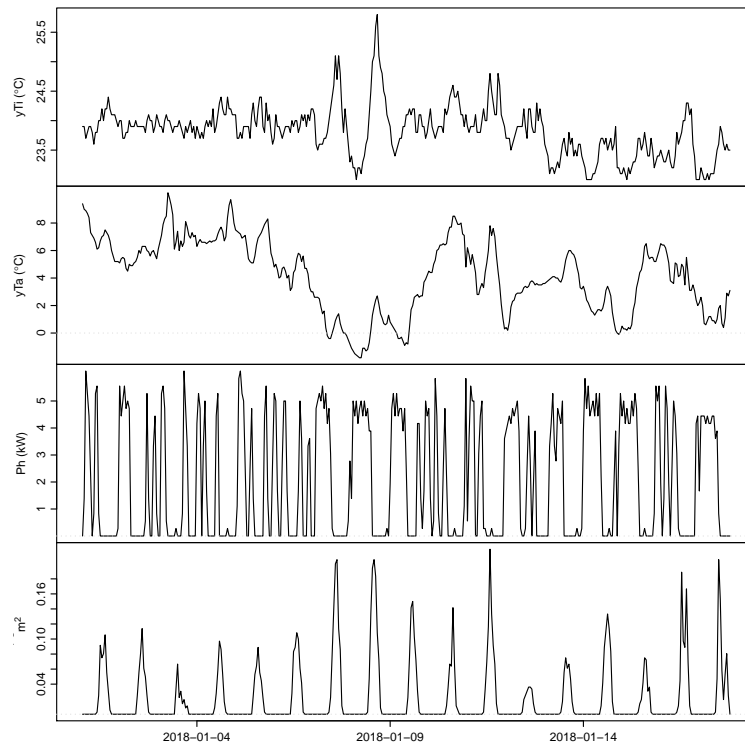


Figura 3.2.1: Representació de les sèries temporals de les dades.

3.3 Variables d'estat i paràmetres

El procediment escollit proposa començar des del model més simple i, iterativament, anar seleccionant models més complexos. Així doncs, el model més simple és aquell que només considerarà una variable d'estat i, a cada iteració, se n'afegirà una. Per poder-ho desenvolupar, s'utilitzarà la metodologia *grey-box*, que es basa en dividir l'edifici de l'estudi en diferents seccions.

Per poder definir cada model, se seleccionen diferents parts de l'edifici i, en funció d'aquestes, es modifica la part dinàmica. Aquestes parts són:

- **Interior:** fa referència a l'aire dins de l'edifici. Es modelitza com a la capacitat de calor connectada a altres parts utilitzant resistències termals.
- **Medi:** el medi tèrmic dins de l'edifici són les parets interiors i els mobles, que es modelitza amb una capacitat de calor i una resistència tèrmica cap a l'interior.

- **Calefactor:** els calefactors es modelitzen amb una capacitat de calor i una resistència tèrmica cap a l'interior.
- **Solar:** l'entrada de calor a partir de la radiació solar es modelitza usant la radiació global multiplicada per l'àrea efectiva de finestres.
- **Coberta:** la coberta de l'edifici es modelitza amb una capacitat de calor i resistències tèrmiques amb l'interior i l'ambient.
- **Ambient:** l'ambient es representa amb la temperatura observada de l'aire.

Partint d'aquestes parts, el model pot arribar a incloure fins a quatre variables d'estat, on cada una representa la temperatura d'una part de l'edifici. Aquestes són:

- T_i : és la temperatura de l'interior, és a dir, de l'aire dins de l'edifici. Aquesta variable d'estat és la que es considerarà en el model més simple.
- T_m : és la temperatura del medi tèrmic intern, és a dir, de les parts interiors i dels mobles.
- T_h : és la temperatura dels calefactors.
- T_e : és la temperatura de la coberta de l'edifici.

Els paràmetres del model representen diferents propietats tèrmiques de l'edifici. Per una banda, es consideren les resistències tèrmiques:

- R_{im} : entre l'interior i el medi tèrmic intern
- R_{ih} : entre l'interior i els calefactors
- R_{ia} : entre l'interior i l'ambient
- R_{ie} : entre l'interior i la coberta de l'edifici
- R_{ea} : entre la coberta de l'edifici i l'ambient

Les capacitats calorífiques de les diferents parts de l'edifici es representen mitjançant:

- C_i : per a l'interior
- C_m : per a les parets interiors i els mobles
- C_h : per als calefactors elèctrics
- C_e : per a la coberta de l'edifici

Finalment, també hi ha dos coeficients que representen una estimació de l'àrea efectiva en la qual l'energia procedent de la radiació solar entra a l'edifici. Aquests són:

- A_w : àrea efectiva de les finestres de l'edifici
- A_e : àrea efectiva per la qual entra radiació solar a la coberta de l'edifici

3.4 Eina d'estimació: llibreria CTSM

Per poder implementar els diferents models i realitzar l'anàlisi d'aquests, s'ha utilitzat la llibreria CTSM (*Continuous Time Stochastic Modeling*) del *software* estadístic R.

Aquesta llibreria proporciona un marc per a la identificació i estimació de models estocàstics *grey-box*. Els models, que poden ser tant lineals com no lineals, han de tenir l'estructura següent:

$$dx_t = f(x_t, u_t, t, \theta)dt + \sigma(u_t, t, \theta)d\omega_t, \quad (3.4.1)$$

$$y_k = h(x_k, u_k, t_k, \theta) + \epsilon_k, \quad (3.4.2)$$

on 3.4.1 és la part dinàmica del model, que conté l'equació diferencial estocàstica en temps continu i fa referència a la descripció física del model. L'equació 3.4.2 és l'equació de mesura en temps discret del sistema físic estudiat.

A més, la llibreria es basa en la teoria de la versemblança, presentada en l'apartat 2.4, i el filtre de Kalman en temps continu, introduït en l'apartat 2.3, per obtenir les estimacions dels diferents paràmetres dels models.

3.4.1 Obtenció del model

Per aconseguir cada model, primerament cal inicialitzar-lo utilitzant la funció `ctsm`:

```
model <- ctsm().
```

Aquest funció generadora defineix un objecte de classe `ctsm`, que té un conjunt de mètodes lligats a ell. Aquests s'usen per incloure l'estructura del model i els límits dels paràmetres.

Seguidament, és necessari introduir totes les equacions diferencials estocàstiques de la part dinàmica del model, és a dir, les que formen 3.4.1. Per fer-ho, és necessari cridar

```
model$addSystem(formula),
```

on `formula` fa referència a l'equació diferencial, utilitzant el criteri adequat de R per escriure-la. A més, també cal introduir l'equació de mesura del model a partir de

```
model$addObs(formula),
```

seguint el mateix criteri que per a les equacions dinàmiques. A continuació, és necessari afegir els diferents *inputs* dels que es disposi, és a dir, totes les dades que s'han obtingut, utilitzant la funció

```
model$addInput(simbol),
```

on `simbol` especifica quines variables de les equacions de mesura i dinàmiques són *inputs* externs. Perquè es pugui realitzar l'estimació dels paràmetres del model utilitzant la maximització de la funció de versemblança, cal introduir els valors inicials per a les variables d'estat i els paràmetres, així com per als límits superior i inferior. Utilitzant la funció

```
model$setParameter( a = c(init = valor, lower = valor, upper = valor)),
```

es fixen el valor inicial i els límits per al paràmetre a.

Finalment, per obtenir l'estimació del model, és necessari aplicar la funció següent:

```
fit <- model$estimate(data = dades7).
```

3.4.2 Interpretació del model

La funció

```
summary(fit, extended = TRUE)
```

imprimeix una matriu que inclou els paràmetres estimats amb la seva desviació típica juntament amb algunes variables d'optimització, i la matriu de correlació de les estimacions realitzades. Els resultats obtinguts per a cada paràmetre es poden observar a la taula 3.4.1.

Estimate	El valor del paràmetre estimat.
Std. Error	La desviació estàndard del paràmetre estimat.
t value	El valor de l'estadístic t.
Pr(> t)	La probabilitat corresponent als límits establerts pel valor t d'una distribució t d'Student. Dit d'una altra manera, la probabilitat que el valor inicial de la variable d'estat o del paràmetre sigui insignificant, és a dir, igual a 0. Si aquest valor no és petit (normalment hauria d'estar per sota de 0.05) pot ser un indicador que el model està sobreparametritzat.
dF/dPar	La derivada de la funció objectiu respecte a la variable d'estat o al paràmetre. Si aquest valor no és proper a 0, la solució trobada podria no ser un òptim real i, per tant, caldria modificar la configuració i repetir el càlcul.
dPen/dPar	La derivada de la funció de penalització respecte a la variable d'estat o al paràmetre. Si el valor és significatiu comparat amb el valor anterior, l'estimació podria ser propera als límits establerts i caldria modificar-los.

Taula 3.4.1: Valors obtinguts per a cada paràmetre.

A més, aquesta llibreria també inclou funcions per poder realitzar prediccions, el filtrat i l'allisat, que s'usaran per aprofundir més en els resultats obtinguts.

També cal remarcar que es poden consultar dos exemples de com utilitzar aquesta llibreria en les referències [9] i [10].

3.5 Models d'estudi

Els models que s'estudiaran es formulen en funció de les parts de l'edifici que es consideren. Cal remarcar que tots els models tindran la mateixa equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t) \quad (3.5.1)$$

i que considera les observacions que s'han fet sobre la variable d'estat T_i , que és la que quantifica la temperatura a l'interior de l'edifici.

Per a cada model, s'inclouran els resultats obtinguts, és a dir, l'estimació de tots els paràmetres, la significació d'aquests, el valor del gradient i el valor de la funció de penalització. A més, també s'afegiran el logaritme de la funció de versemblança i el nombre de paràmetres estimats. Cal remarcar que els resultats presenten únicament dues xifres significatives i que, en aquells casos on s'observi 0.00 o -0.00, es fa referència a que el valor obtingut és, en termes absoluts, menor a 0.001.

3.5.1 Model Ti

És el model més simple de tots i només considera la variable d'estat T_i , és a dir, només es considera la part interior de l'edifici. Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.1.

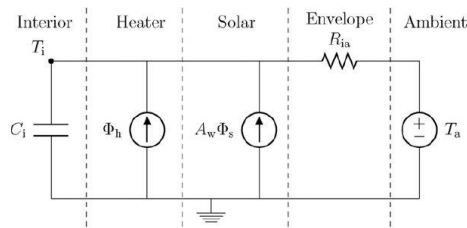


Figura 3.5.1: Representació del model Ti.

L'equació dinàmica del model és:

$$dT_i = \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i. \quad (3.5.2)$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.1, es mostren en la taula 3.5.1.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.91	0.17	140.52	0.00	-0.00	0.00
Aw	30.48	6.29	4.85	0.00	-0.00	0.00
Ci	30.45	1.92	15.87	0.00	-0.00	0.00
e11	-5.33	0.36	-14.85	0.00	-0.00	-0.00
p11	-1.87	0.07	-26.39	0.00	-0.00	-0.00
Ria	7.29	0.75	9.73	0.00	0.00	0.00

Taula 3.5.1: Resultats obtinguts en el model Ti.

En total, es tenen 6 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 114.0731.

3.5.2 Model TiTe

Aquest model considera dues variables d'estat: la temperatura interior (T_i) i la temperatura de la coberta de l'edifici (T_e). Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.2.

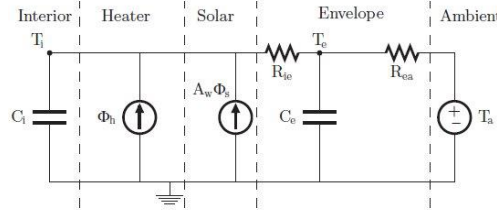


Figura 3.5.2: Representació del model TiTe.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned} dT_i &= \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i \\ dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.2, es mostren en la taula 3.5.2.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.14	170.29	0.00	0.00	0.00
Te0	23.94	0.32	75.83	0.00	-0.00	0.00
Aw	33.58	6.27	5.36	0.00	-0.00	0.00
Ce	21.73	21.68	1.00	0.32	-0.00	0.00
Ci	12.04	20.20	0.60	0.55	-0.00	0.00
e11	-5.06	0.69	-7.38	0.00	0.00	-0.00
p11	-10.75	0.36	-29.72	0.00	0.00	0.00
p22	-1.43	0.95	-1.50	0.14	-0.00	-0.00
Rea	7.09	0.68	10.45	0.00	0.00	0.00
Rie	0.02	0.03	0.56	0.58	0.00	-0.00

Taula 3.5.2: Resultats obtinguts en el model TiTe.

En total, es tenen 10 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 114.9891.

3.5.3 Model TiTh

Aquest model considera dues variables d'estat: la temperatura interior (T_i) i la temperatura dels calefactors (T_h). Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.3.

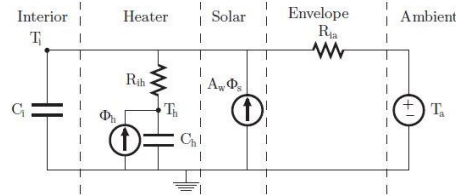


Figura 3.5.3: Representació del model TiTh.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned} dT_i &= \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i \\ dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.3, es mostren en la taula 3.5.3.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.15	159.34	0.00	0.00	0.00
Th0	24.50	0.33	74.24	0.00	-0.00	0.00
Aw	10.20	2.83	3.60	0.00	-0.00	0.00
Ch	21.12	4.21	5.01	0.00	-0.00	0.00
Ci	6.52	1.16	5.61	0.00	-0.00	0.00
e11	-7.91	8.56	-0.92	0.36	-0.00	-0.00
p11	-1.60	0.11	-14.46	0.00	0.00	-0.00
p22	-9.69	299.08	-0.03	0.97	-0.00	0.00
Ria	8.71	0.37	23.53	0.00	-0.00	0.00
Rih	0.46	0.10	4.55	0.00	-0.00	0.00

Taula 3.5.3: Resultats obtinguts en el model TiTh.

En total, es tenen 10 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 133.1669.

3.5.4 Model TiTm

Aquest model considera dues variables d'estat: la temperatura interior (T_i) i la temperatura de parets interiors i mobles (T_m). Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.4.

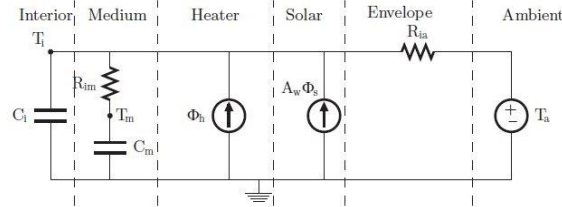


Figura 3.5.4: Representació del model TiTm.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned}dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i \\dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m.\end{aligned}\quad (3.5.5)$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.4, es mostren en la taula 3.5.4.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.14	170.68	0.00	-0.00	0.00
Tm0	23.98	0.32	76.05	0.00	0.00	0.00
Aw	33.43	6.71	4.98	0.00	0.00	0.00
Ci	13.37	14.55	0.92	0.36	0.00	0.00
Cm	20.43	16.33	1.25	0.21	0.00	0.00
e11	-5.01	0.50	-10.04	0.00	0.00	-0.00
p11	-10.76	0.34	-32.07	0.00	0.00	0.00
p22	-1.37	0.74	-1.83	0.07	-0.00	-0.00
Ria	7.11	0.75	9.47	0.00	0.00	0.00
Rim	0.02	0.03	0.75	0.45	0.00	-0.00

Taula 3.5.4: Resultats obtinguts en el model TiTm.

En total, es tenen 10 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 115.1015.

3.5.5 Model TiTeTh

Aquest model considera tres variables d'estat: la temperatura interior (T_i), la temperatura de la coberta de l'edifici (T_e) i la temperatura dels calefactors (T_h). Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.5.

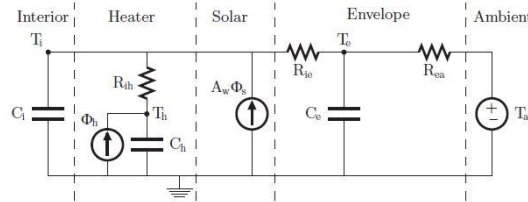


Figura 3.5.5: Representació del model TiTeTh.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned}
 dT_i &= \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i \\
 dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e \\
 dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h.
 \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.5, es mostren en la taula 3.5.5.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.17	142.00	0.00	0.07	0.00
Te0	23.75	0.37	63.78	0.00	-0.01	0.00
Th0	24.76	0.48	51.10	0.00	0.02	0.00
Aw	7.08	1.28	5.52	0.00	-0.00	0.00
Ce	7.02	0.29	24.40	0.00	0.53	0.00
Ch	12.02	0.24	49.47	0.00	0.23	0.00
Ci	0.18	0.04	4.39	0.00	0.25	-0.00
e11	-4.89	0.43	-11.47	0.00	-0.00	-0.00
p11	-9.31	0.23	-40.28	0.00	-0.01	0.00
p22	-1.72	0.09	-18.94	0.00	0.06	-0.00
p33	-6.80	0.43	-15.92	0.00	0.00	-0.00
Rea	8.80	0.11	81.32	0.00	-0.71	0.00
Rie	0.22	0.06	3.72	0.00	0.31	0.00
Rih	0.86	0.12	6.93	0.00	0.07	0.00

Taula 3.5.5: Resultats obtinguts en el model TiTeTh.

En total, es tenen 14 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 139.3091.

3.5.6 Model TiTeTm

Aquest model considera tres variables d'estat: la temperatura interior (T_i), la temperatura de la coberta de l'edifici (T_e) i la temperatura de parets interiors i mobles (T_m). Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.6.

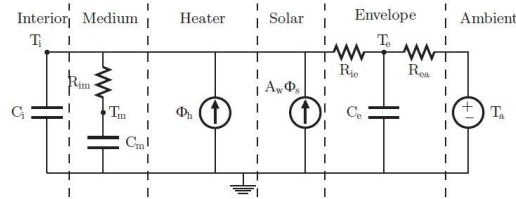


Figura 3.5.6: Representació del model TiTeTm.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned}
 dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i \\
 dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e \\
 dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m.
 \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.6, es mostren en la taula 3.5.6.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.16	153.02	0.00	0.00	0.00
Te0	22.56	0.97	23.37	0.00	-0.00	0.00
Tm0	24.04	0.39	61.44	0.00	0.00	0.00
Aw	43.22	7.48	5.78	0.00	-0.00	0.00
Ce	39.75	1.26	31.49	0.00	0.00	2.47
Ci	14.33	18.84	0.76	0.45	0.00	0.00
Cm	20.44	21.51	0.95	0.34	0.00	0.00
e11	-5.13	0.77	-6.64	0.00	0.00	-0.00
p11	-9.68	6.29	-1.54	0.12	0.00	0.00
p22	-9.88	136.24	-0.07	0.94	-0.00	0.00
p33	-1.26	0.97	-1.30	0.19	-0.00	-0.00
Rea	6.00	0.68	8.78	0.00	-0.00	0.00
Rie	0.47	0.19	2.42	0.02	-0.00	0.00
Rim	0.02	0.03	0.65	0.52	0.00	-0.00

Taula 3.5.6: Resultats obtinguts en el model TiTeTm.

En total, es tenen 14 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 118.0187.

3.5.7 Model TiThTm

Aquest model considera tres variables d'estat: la temperatura interior (T_i), la temperatura dels calefactors (T_h) i la temperatura de parets interiors i mobles (T_m). Gràficament, es representa com es mostra en la figura 3.5.7.

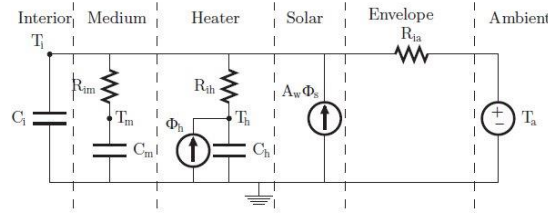


Figura 3.5.7: Representació del model TiThTm.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned}
 dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i \\
 dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h \\
 dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m.
 \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.7, es mostren en la taula 3.5.7.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.16	150.08	0.00	0.29	0.00
Th0	24.56	0.68	35.94	0.00	0.05	0.00
Tm0	24.10	0.40	60.65	0.00	-0.21	0.00
Aw	7.96	1.19	6.70	0.00	-0.01	0.00
Ch	12.62	0.04	354.18	0.00	3.96	0.00
Ci	0.23	0.00	53.72	0.00	0.31	-0.00
Cm	7.41	0.02	303.25	0.00	1.49	0.00
e11	-4.94	0.25	-19.59	0.00	0.06	-0.00
p11	-8.59	0.23	-36.92	0.00	-0.22	0.00
p22	-6.22	0.26	-24.16	0.00	0.45	-0.00
p33	-1.70	0.08	-22.23	0.00	-0.07	-0.00
Ria	8.94	0.06	139.02	0.00	-4.16	0.00
Rih	0.70	0.02	38.53	0.00	0.68	0.00
Rim	0.16	0.01	26.28	0.00	-0.59	0.00

Taula 3.5.7: Resultats obtinguts en el model TiThTm.

En total, es tenen 14 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 137.0133.

3.5.8 Model TiTeThTm

Aquest model és el més complet de tots, ja que considera les quatre variables d'estat: la temperatura interior (T_i), la temperatura de la coberta de l'edifici (T_e), la temperatura dels calefactors (T_h) i la temperatura de les parets interiors i els mobles (T_m). Gràficament, la representació d'aquest model es mostra en la figura 3.5.8.

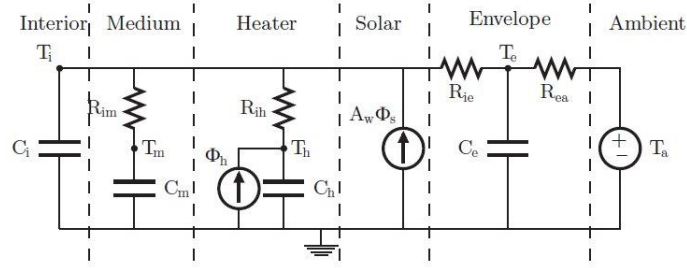


Figura 3.5.8: Representació del model TiTeThTm.

La part dinàmica del model és:

$$\begin{aligned}
 dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i \\
 dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e \\
 dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h \\
 dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m.
 \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

Els resultats obtinguts amb aquest model, a partir del codi presentat a la secció A.8, es mostren en la taula 3.5.8.

En total, es tenen 18 paràmetres i el valor del logaritme de la funció de versemblança és de 143.3065.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.89	0.15	159.41	0.00	-9.30	0.00
Te0	23.83	0.48	49.18	0.00	0.49	0.00
Th0	23.99	0.56	42.74	0.00	6.01	0.00
Tm0	44.96	0.01	3429.69	0.00	108.96	107.15
Aw	6.58	1.53	4.30	0.00	0.61	0.00
Ce	5.83	1.42	4.10	0.00	-753.12	0.00
Ch	12.91	3.98	3.25	0.00	-3413.14	0.00
Ci	0.14	0.23	0.63	0.53	150.03	0.00
Cm	7.35	7.83	0.94	0.35	624.82	0.00
e11	-30.19	6.70	-4.51	0.00	0.00	0.00
p11	-0.28	0.95	-0.30	0.76	1.47	-0.00
p22	-1.73	0.30	-5.69	0.00	-41.19	-0.00
p33	-49.36	3.68	-13.43	0.00	0.59	0.59
p44	-34.06	56.92	-0.60	0.55	0.00	0.00
Rea	7.75	0.79	9.77	0.00	-416.79	0.00
Rie	0.25	0.03	7.60	0.00	-7803.05	0.00
Rih	0.90	0.24	3.82	0.00	-234.77	0.00
Rim	28.17	2.88	9.80	0.00	-1651.98	0.00

Taula 3.5.8: Resultats obtinguts en el model TiTeThTm.

3.6 Tria del model

3.6.1 Test de Raó de la Versemblança

El test de Raó de la Versemblança s'utilitza com a criteri de comparació entre dos models niuats, on un dels dos és més petit que l'altre. Aquesta prova estadística serveix per escollir quin dels dos models representa millor les dades. Així doncs, les hipòtesis a verificar són:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model petit} \\ H_1 : \text{s'escull el model gran} \end{cases}$$

Per poder aplicar aquesta prova, és necessari obtenir l'estadístic de contrast que s'anomenarà Λ . Aquest es calcula a partir de la fórmula

$$\Lambda = -2 \ln\left(\frac{L_0}{L_1}\right) = -2(\ln(L_0) - \ln(L_1)), \quad (3.6.1)$$

on L_0 fa referència al valor màxim de la funció de versemblança en el model petit i L_1 al valor màxim de la mateixa funció en el model gran.

Seguidament, i fixant un nivell de significació $\alpha = 0.05$, cal calcular el valor crític $\chi_{df}^2(0.95)$. És a dir, aquell valor que segueix una distribució Chi-quadrat amb el número de graus de llibertat definit per

$$df = |\text{paràmetres model gran}| - |\text{paràmetres model petit}| \geq 1 \quad (3.6.2)$$

i que deixa una probabilitat α per la dreta.

Un cop calculats l'estadístic de contrast i el valor crític, ja es pot concloure el test:

- Si $\Lambda > \chi^2_{df}(0.95)$ es rebutja la hipòtesi nul·la i s'accepta l'alternativa: és millor el model gran.
- Si $\Lambda < \chi^2_{df}(0.95)$ s'accepta la hipòtesi nul·la: és millor el model petit.

3.6.2 Aplicació als diferents models

Seguidament, és necessari aplicar el test de Raó de la Versemblança entre tots els models calculats, per així decidir quin és el model que millor representa les dades. El valor del logaritme del màxim de la funció de versemblança i el nombre de paràmetres de cada model es poden observar en la taula 3.6.1.

Model Ti		
$L_{Ti} = 114.0731$		
$df_{Ti} = 6$		
Model TiTe	Model TiTh	Model TiTm
$L_{TiTe} = 114.9891$	$L_{TiTh} = 133.1669$	$L_{TiTm} = 115.1015$
$df_{TiTe} = 10$	$df_{TiTh} = 10$	$df_{TiTm} = 10$
Model TiTeTh	Model TiTeTm	Model TiThTm
$L_{TiTeTh} = 139.3091$	$L_{TiTeTm} = 118.0187$	$L_{TiThTm} = 137.0133$
$df_{TiTeTh} = 14$	$df_{TiTeTm} = 14$	$df_{TiThTm} = 14$
Model TiTeThTm		
$L_{TiTeThTm} = 143.3065$		
$df_{TiTeThTm} = 18$		

Taula 3.6.1: Logaritme del màxim de la funció de versemblança i nombre de paràmetres per a tots els models.

A continuació, es presentaran els resultats obtinguts en els diferents tests així com el model que finalment s'ha escollit. És necessari remarcar que totes les proves realitzades s'han fet considerant un nivell de significació $\alpha = 0.05$. Els càlculs utilitzats per a tots els tests es poden observar a l'apartat B.

Primerament, cal estudiar els contrastos entre el model més simple i aquells que consideren dues variables d'estat. Els resultats i conclusions d'aquests contrastos es poden observar en la taula 3.6.2.

Test realitzat	Estadístic de contrast (Λ)	Graus de llibertat (df)	Valor crític (χ^2_{df})	Conclusió
Ti vs TiTe	1.8320	4	9.487729	Acceptació H_0
Ti vs TiTh	38.1876	4	9.487729	Acceptació H_1
Ti vs TiTm	2.0568	4	9.487729	Acceptació H_0

Taula 3.6.2: Resultats obtinguts entre el model Ti i els models formats per dues variables d'estat.

A partir dels valors obtinguts en els diferents tests, es pot concloure que el model escollit és el TiTh, ja que és l'únic cas en el qual es rebutja la hipòtesi nul·la i s'accepta l'alternativa.

Seguidament, és necessari realitzar el test de Raó de Versemblança escollint com a model simple el seleccionat anteriorment. Com que aquesta prova estadística es basa en models niuats, no es pot realitzar el contrast entre TiTh i TiTeTm. Els càlculs i conclusions d'aquests tests es poden observar en la taula 3.6.3.

Test realitzat	Estadístic de contrast (Λ)	Graus de llibertat (df)	Valor crític (χ^2_{df})	Conclusió
TiTh vs TiTeTh	12.2844	4	9.487729	Acceptació H_1
TiTh vs TiThTm	7.6928	4	9.487729	Acceptació H_0

Taula 3.6.3: Resultats obtinguts entre el model TiTh i els models formats per tres variables d'estat.

A partir dels resultats obtinguts en els dos tests, es pot concloure que el model escollit és el TiTeTh, ja que és l'únic cas en el qual es rebutja la hipòtesi nul·la i s'accepta l'alternativa.

Finalment cal realitzar un últim test, entre aquest model i el complet. El resultat obtingut es pot observar en la taula 3.6.4.

Test realitzat	Estadístic de contrast (Λ)	Graus de llibertat (df)	Valor crític (χ^2_{df})	Conclusió
TiTeTh vs TiTeThTm	7.9948	4	9.487729	Acceptació H_0

Taula 3.6.4: Resultats obtinguts entre el model TiTeTh i el model complet.

En aquest cas s'accepta la hipòtesi nul·la i, per tant, es pot concloure que el model que millor representa les dades és el TiTeTh.

3.6.3 Validació del model

Seguidament, es realitzarà la validació del model TiTeTh, que ha sigut l'escollit utilitzant el test de Raó de Versemblança.

Per poder-ho comprovar, és necessari analitzar els resultats presentats anteriorment per aquest model, que es tornen a mostrar a la taula 3.6.5.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	23.90	0.17	142.00	0.00	0.07	0.00
Te0	23.75	0.37	63.78	0.00	-0.01	0.00
Th0	24.76	0.48	51.10	0.00	0.02	0.00
Aw	7.08	1.28	5.52	0.00	-0.00	0.00
Ce	7.02	0.29	24.40	0.00	0.53	0.00
Ch	12.02	0.24	49.47	0.00	0.23	0.00
Ci	0.18	0.04	4.39	0.00	0.25	-0.00
e11	-4.89	0.43	-11.47	0.00	-0.00	-0.00
p11	-9.31	0.23	-40.28	0.00	-0.01	0.00
p22	-1.72	0.09	-18.94	0.00	0.06	-0.00
p33	-6.80	0.43	-15.92	0.00	0.00	-0.00
Rea	8.80	0.11	81.32	0.00	-0.71	0.00
Rie	0.22	0.06	3.72	0.00	0.31	0.00
Rih	0.86	0.12	6.93	0.00	0.07	0.00

Taula 3.6.5: Resultats obtinguts en el model TiTeTh.

A partir d'aquests resultats es pot observar que:

- El p-valor del t-test (columna $\Pr(>|t|)$) és inferior a 0.05 per a tots els paràmetres. Per tant, tots els paràmetres són significatius.
- La derivada de la funció objectiu respecte cada paràmetre (columna $dF/dPar$) és propera a 0 en tots els casos. Per tant, es pot concloure que la solució trobada sí que és un òptim real.
- La derivada de la funció de penalització respecte cada paràmetre (columna $dPen/dPar$) és insignificant en tots els casos. Per tant, el valor obtingut en tots els paràmetres no és proper a cap dels límits establerts.

Així doncs, es pot concloure que el model escollit no té cap paràmetre insignificant (no té sobreparametrització), és un òptim real i els límits establerts per a cada paràmetre són correctes.

A més, també és necessari analitzar els residus. Fent referència a la figura 3.6.1, es pot observar en el primer gràfic com els residus tenen mitjana 0 i que, a més, no s'identifica cap tendència, sinó que es distribueixen aleatòriament. En el segon gràfic, es comprova com segueixen una distribució Normal i també que hi ha alguns *outliers*. En el tercer gràfic, es comprova com no hi ha autocorrelació entre els residus, és a dir, hi ha independència. Finalment, en el darrer gràfic, si no es consideren els valors extrems, es pot concloure que els residus tenen variància constant.

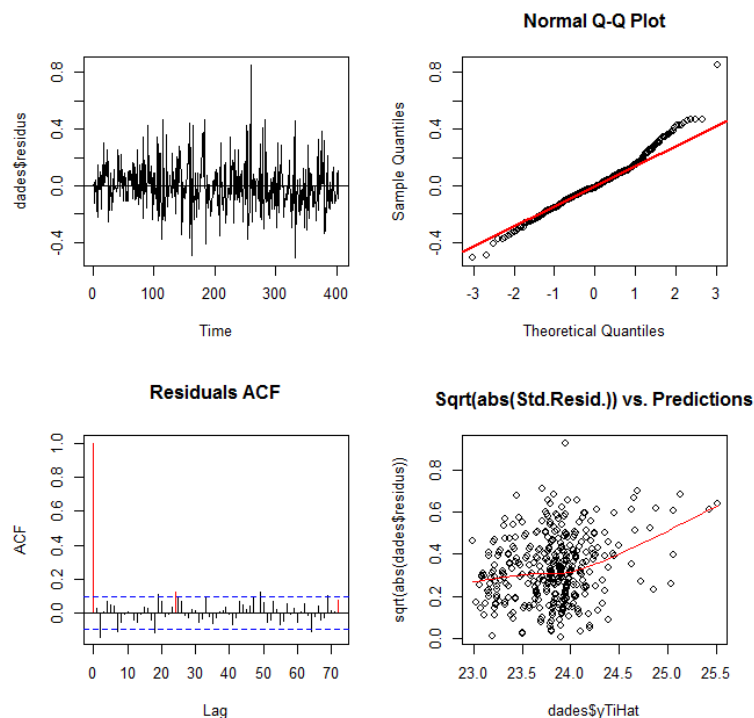


Figura 3.6.1: Representació dels residus en el model TiTeTh.

3.7 Explotació del model

3.7.1 Interpretació del model

El model escollit té un total de 14 paràmetres però aquells que cal estudiar, i que tenen una interpretació física real, són les capacitats (C) i les resistències (R). El model teòric que s'estudia és

$$\begin{aligned}dT_i &= \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i \\dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e \\dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h.\end{aligned}\tag{3.7.1}$$

La capacitat calorífica, que es mesura en $\frac{kWh}{^\circ C}$, és el valor físic que mesura la quantitat de calor que produeix un canvi en la temperatura d'una secció per un grau centígrad, és a dir, com més gran sigui la capacitat calorífica més costa variar la temperatura. Aquesta propietat depèn del material utilitzat.

Per altra banda, la resistència tèrmica, que es mesura en $\frac{^\circ C}{kW}$, és el valor físic que quantifica el flux de calor entre dos medis quan hi ha un diferencial de temperatura. Aquesta propietat té una interpretació anàloga a la resistència elèctrica de la Llei d'Ohm: a més resistència, menys transmissió de calor. Com es pot observar, a més, aquest valor és una mesura entre dues parts, per tant, si és elevat implica que hi ha poca transmissió de calor entre les seccions estudiades.

A partir de les definicions presentades, es pot especificar que hi ha eficiència energètica quan la resistència i la capacitat són elevades.

Fent referència a aquestes dues propietats, a nivell físic és interessant analitzar els valors següents, obtinguts en el model escollit:

$$C_i = 0.1801, R_{ie} = 0.2241, C_e = 7.0206, R_{ea} = 8.7992.$$

Es pot observar com el valor de la resistència entre la coberta de l'edifici i l'ambient és molt elevat. Aquest fet implica que hi ha poca transmissió de calor de dins de l'edifici a fora. A més, la capacitat calorífica de la coberta també és molt alta. La combinació d'aquests dos factors permet determinar que l'habitatge està construït amb materials aïllants i que, per tant, hi haurà poca pèrdua de calor. Com a conseqüència, es pot concloure que l'edifici és energèticament eficient, que coincideix amb el fet que disposi la Qualificació Energètica A.

Pot comprovar-se també com la capacitat calorífica de l'interior i la resistència entre aquest medi i la coberta tenen, en ambdós casos, valors molt baixos. Per tant, implica que en les dues seccions la temperatura ha de tenir patrons semblants.

3.7.2 Filtrat i Smooth

Per poder realitzar el filtrat i l'allisat del model TiTeTh s'ha utilitzat el codi inclòs en l'apartat C. Aquests valors s'obtenen gràcies al filtre de Kalman, que permet imputar valors per a variables d'estat no observades.

Dels resultats obtinguts pel filtrat, que incorpora informació fins a la mesura actual, s'han pogut obtenir les sèries temporals estimades per a les variables d'estat de la temperatura de la coberta i la dels calefactores.

Com es pot comprovar en la imatge 3.7.1, i fent referència a la interpretació dels paràmetres realitzada anteriorment, en l'interior i en la coberta de l'edifici les temperatures tenen patrons semblants. Aquest fet és degut a que la resistència entre aquests dos medis és baixa i, per tant, s'equilibren les respectives temperatures.

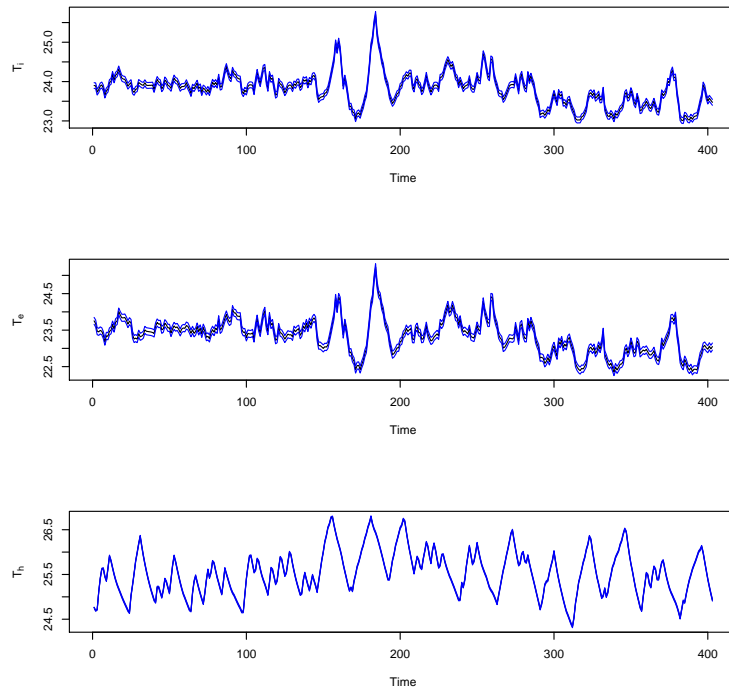


Figura 3.7.1: Representació del filtrat.

Per altra banda, els resultats obtinguts en l'allisat no són factibles. Els últims valors haurien de ser iguals als del filtrat i, en les tres temperatures, superen els 40°C. A més, quantifica les temperatures inicials amb valors superiors als 1000°C. És per aquest motiu que seria necessari realitzar una depuració del codi implementat en la funció que calcula l'allisat de les dades.

3.8 Escenaris deterministes

En aquest apartat es pretén obtenir les expressions per a cada variable d'estat considerant que el model fos determinista, és a dir, sense considerar els processos de Wiener. A més, també caldrà tractar els valors de les variables observades. Per una banda, es plantejarà un model sense cap dels *inputs* anteriors. Per tant, no apareixeran ni T_a , ni ϕ_s , ni ϕ_h . Per altra banda, es considerarà un model on només s'utilitzi com a *input* la mitjana dels valors observats de la temperatura ambient. Per poder aconseguir el sistema d'equacions diferencials ordinàries, s'usarà el model obtingut anteriorment i amb les corresponents estimacions dels paràmetres.

3.8.1 Cas 1: no es tenen inputs

En aquest cas el model d'estudi és:

$$\begin{aligned}dT_i &= \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt \\dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt - \frac{1}{R_{ea}C_e}T_e dt \\dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt.\end{aligned}\tag{3.8.1}$$

Els valors obtinguts de l'estimació dels diferents paràmetres són:

$$R_{ih} = 0.8558, C_i = 0.1801, R_{ie} = 0.2241, C_e = 7.0206, R_{ea} = 8.7992, C_h = 12.0200.\tag{3.8.2}$$

Per tant, el sistema d'equacions queda descrit de la manera següent:

$$\dot{T} = AT\tag{3.8.3}$$

on:

$$A = \begin{pmatrix} -29.2347 & 22.7467 & 6.4880 \\ 0.6356 & -0.6518 & 0.0000 \\ 0.0972 & 0.0000 & -0.0972 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_i \\ T_e \\ T_h \end{pmatrix}.$$

Així doncs, es tracta del cas d'un sistema lineal homogeni. Per resoldre'l, cal trobar una matriu fonamental i, després, solucionar el problema de Cauchy, és a dir, cal buscar les solucions de la forma:

$$T(t) = \varphi(t; t_0, T_0) = M(t)[M(t_0)]^{-1}T_0,\tag{3.8.4}$$

on $M(t)$ és una matriu fonamental i T_0 és la condició inicial per a $t = t_0$, és a dir, $T(t_0) = T_0$. Primerament, és necessari trobar els valors propis de la matriu A .

$$\begin{vmatrix} -29.2347 - \lambda & 22.7467 & 6.4880 \\ 0.6356 & -0.6518 - \lambda & 0.0000 \\ 0.0972 & 0.0000 & -0.0972 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -29.7530, \lambda_2 = -0.2260, \lambda_3 = -0.0050$$

Seguidament, cal calcular els vectors propis associats a cada λ . Així:

$$v_1 \in \text{Ker}(A - \lambda_1 Id) \Rightarrow (A - \lambda_1 Id \mid 0) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -305.0990 \\ 6.6640 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$v_2 \in \text{Ker}(A - \lambda_2 Id) \Rightarrow (A - \lambda_2 Id \mid 0) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1.3210 \\ -1.9700 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$v_3 \in \text{Ker}(A - \lambda_3 Id) \Rightarrow (A - \lambda_3 Id \mid 0) \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0.9450 \\ 0.9290 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

Per tant, s'obtenen les matrius següents:

$$J = \begin{pmatrix} -29.7530 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.2260 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0050 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -305.0990 & -1.3210 & 0.9450 \\ 6.6640 & -1.9700 & 0.9290 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

que són les matrius necessàries per poder obtenir la matriu fonamental. La primera és una matriu que ja es troba en forma de Jordan, a partir de la qual se'n pot calcular l'exponencial

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-29.7530t} & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & e^{-0.2260t} & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & e^{-0.0050t} \end{pmatrix}.$$

Així doncs, una matriu fonamental del sistema és:

$$M(t) = e^{tA}P = Pe^{tJ} = \begin{pmatrix} -305.0990e^{-29.7530t} & -1.3210e^{-0.2260t} & 0.9450e^{-0.0050t} \\ 6.6640e^{-29.7530t} & -1.9700e^{-0.2260t} & 0.9290e^{-0.0050t} \\ e^{-29.7530t} & e^{-0.2260t} & e^{-0.0050t} \end{pmatrix}.$$

Finalment, cal resoldre el problema de Cauchy plantejat a l'equació 3.8.4. Per fer-ho, es considerarà $t_0 = 0$ i, per a les condicions inicials de les variables d'estat, els valors inicials estimats en el model escollit, és a dir:

$$T_0 = \begin{pmatrix} T_i(0) \\ T_e(0) \\ T_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.9000 \\ 23.7540 \\ 24.7640 \end{pmatrix}.$$

I per tant:

$$[M(t_0)]^{-1} = [M(0)]^{-1} = \begin{pmatrix} -305.0990 & -1.3210 & 0.9450 \\ 6.6640 & -1.9700 & 0.9290 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.0032 & 0.0025 & 0.0007 \\ -0.0064 & -0.3400 & 0.3218 \\ 0.0096 & 0.3374 & 0.6774 \end{pmatrix}.$$

$$[M(t_0)]^{-1}T_0 = \begin{pmatrix} -0.0032 & 0.0025 & 0.0007 \\ -0.0064 & -0.3400 & 0.3218 \\ 0.0096 & 0.3374 & 0.6774 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23.9000 \\ 23.7540 \\ 24.7640 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0003 \\ -0.2576 \\ 25.0213 \end{pmatrix}$$

Finalment doncs, la solució del sistema és

$$T(t) = M(t)[M(t_0)]^{-1}T_0 = \begin{pmatrix} -0.0915e^{-29.7530t} + 0.3403e^{-0.2260t} + 23.6451e^{-0.0050t} \\ 0.0020e^{-29.7530t} + 0.5075e^{-0.2260t} + 23.2448e^{-0.0050t} \\ 0.0003e^{-29.7530t} - 0.2576e^{-0.2260t} + 25.0213e^{-0.0050t} \end{pmatrix},$$

és a dir, les expressions per a cada variable d'estat són:

$$\begin{aligned} T_i(t) &= -0.0915e^{-29.7530t} + 0.3403e^{-0.2260t} + 23.6451e^{-0.0050t}, \\ T_e(t) &= 0.0020e^{-29.7530t} + 0.5075e^{-0.2260t} + 23.2448e^{-0.0050t}, \\ T_h(t) &= 0.0003e^{-29.7530t} - 0.2576e^{-0.2260t} + 25.0213e^{-0.0050t}. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

La representació d'aquestes expressions es pot observar en la figura 3.8.1. Per obtenir-la s'ha utilitzat el codi que es troba a l'apartat D.1.

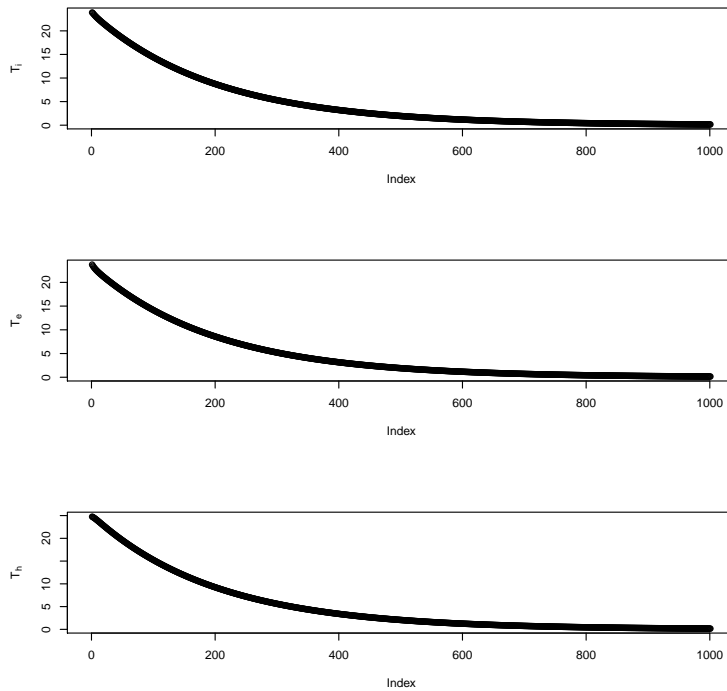


Figura 3.8.1: Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista.

3.8.2 Cas 2: es coneix la mitjana de la temperatura ambient

En aquest cas, s'ha observat la mitjana de la temperatura ambient, és a dir, $T_a = 4.1529^\circ\text{C}$. Així doncs, el model d'estudi és:

$$\begin{aligned} dT_i &= \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt \\ dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt - \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt \\ dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Els valors obtinguts de l'estimació dels diferents paràmetres són:

$$R_{ih} = 0.8558, C_i = 0.1801, R_{ie} = 0.2241, C_e = 7.0206, R_{ea} = 8.7992, C_h = 12.0200. \quad (3.8.7)$$

Per tant, el sistema d'equacions queda descrit de la manera següent:

$$\dot{T} = AT + b \quad (3.8.8)$$

on:

$$A = \begin{pmatrix} -29.2347 & 22.7467 & 6.4880 \\ 0.6356 & -0.6518 & 0.0000 \\ 0.0972 & 0.0000 & -0.0972 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_i \\ T_e \\ T_h \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0672 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, es tracta del cas d'un sistema lineal no homogeni. Per resoldre'l, cal trobar una matriu fonamental i, després, solucionar el problema de Cauchy, és a dir, cal buscar les solucions de la forma:

$$T(t) = \varphi(t; t_0, T_0) = M(t)[M(t_0)]^{-1}T_0 + M(t) \int_{t_0}^t [M(s)]^{-1}b ds, \quad (3.8.9)$$

on $M(t)$ és una matriu fonamental i T_0 és la condició inicial per a $t = t_0$, és a dir, $T(t_0) = T_0$. Com que la part homogènia d'aquest sistema és la mateixa que en el cas anterior, es pot conservar la matriu fonamental. Així doncs, només cal calcular la integral. Primer de tot, es calcula la inversa de la matriu fonamental multiplicada pel vector b :

$$\begin{aligned} [M(s)]^{-1}b &= \begin{pmatrix} -305.0990e^{-29.7530s} & -1.3210e^{-0.2260s} & 0.9450e^{-0.0050s} \\ 6.6640e^{-29.7530s} & -1.9700e^{-0.2260s} & 0.9290e^{-0.0050s} \\ e^{-29.7530s} & e^{-0.2260s} & e^{-0.0050s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0672 \\ 0.0000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0002e^{29.7530s} \\ -0.0228e^{0.2260s} \\ 0.0227e^{0.0050s} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I seguidament, ja es pot calcular la integral, agafant que $t_0 = 0$:

$$\int_0^t [M(s)]^{-1}b ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 0.0002e^{29.7530s} \\ -0.0228e^{0.2260s} \\ 0.0227e^{0.0050s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0.00001e^{29.7530t} - 0.00001 \\ -0.1009e^{0.2260t} + 0.1009 \\ 4.5400e^{0.0050t} - 4.5400 \end{pmatrix}.$$

I cal realitzar el producte de matrius següent:

$$M(t) \int_0^t [M(s)]^{-1}b ds = \begin{pmatrix} 0.0031e^{-29.7530t} - 0.1333e^{-0.2260t} - 4.2903e^{-0.0050t} + 4.4205 \\ -0.0001e^{-29.7530t} - 0.1988e^{-0.2260t} - 4.2177e^{-0.0050t} + 4.4165 \\ -0.00001e^{-29.7530t} + 0.1009e^{-0.2260t} - 4.5400e^{-0.0050t} + 4.4391 \end{pmatrix}.$$

Finalment doncs, la solució del sistema és:

$$\begin{aligned}
 T(t) &= M(t)[M(t_0)]^{-1}T_0 + M(t) \int_{t_0}^t [M(s)]^{-1}bds \\
 &= \begin{pmatrix} -0.0884e^{-29.7530t} + 0.2070e^{-0.2260t} + 19.1748e^{-0.0050t} + 4.4205 \\ 0.0019e^{-29.7530t} + 0.3087e^{-0.2260t} + 19.0271e^{-0.0050t} + 4.4165 \\ 0.0003e^{-29.7530t} - 0.1567e^{-0.2260t} + 20.4813e^{-0.0050t} + 4.4391 \end{pmatrix} \quad (3.8.10)
 \end{aligned}$$

és a dir, les expressions per a cada variable d'estat són:

$$\begin{aligned}
 T_i(t) &= -0.0884e^{-29.7530t} + 0.2070e^{-0.2260t} + 19.1748e^{-0.0050t} + 4.4205, \\
 T_e(t) &= 0.0019e^{-29.7530t} + 0.3087e^{-0.2260t} + 19.0271e^{-0.0050t} + 4.4165, \\
 T_h(t) &= 0.0003e^{-29.7530t} - 0.1567e^{-0.2260t} + 20.4813e^{-0.0050t} + 4.4391.
 \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

La representació d'aquestes expressions es pot observar en la figura 3.8.2. Per obtenir-la s'ha utilitzat el codi que es troba a l'apartat D.2.

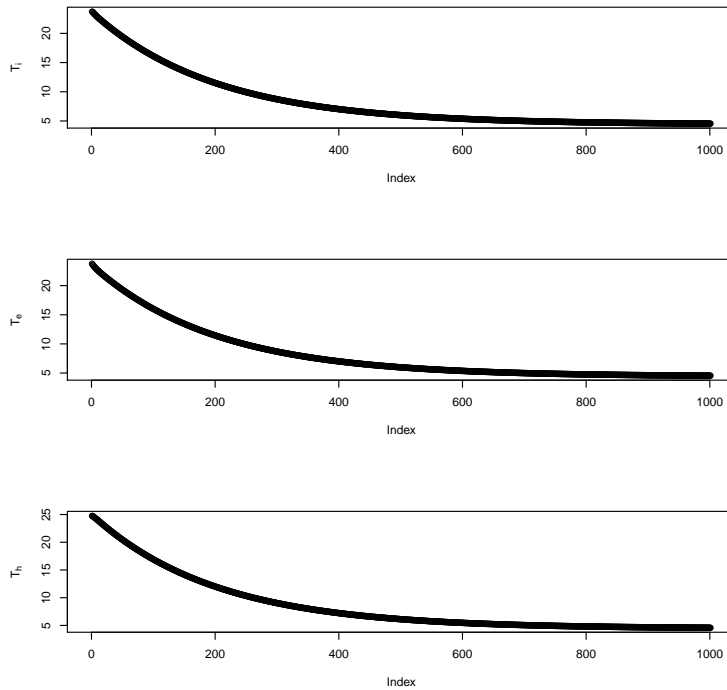


Figura 3.8.2: Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista considerant temperatura ambient.

4. Conclusions

La identificació d'un model adequat per a les dinàmiques de calor d'un edifici, a partir d'observacions de la temperatura interior, la temperatura ambient i variables climàtiques, té aplicacions molt importants com són:

- Predicció del consum d'energia per a la calefacció, per així poder integrar al sistema l'ús d'energies renovables, com l'eòlica i la solar. La implementació de calefacció elèctrica amb tancs d'aigua calenta per a emmagatzematge de calor podria ser una opció en un futur.
- Descripció acurada en l'actuació energètica d'un edifici, que permet obtenir informació sobre l'ús energètic i, així, poder desenvolupar millores efectives en l'habitatge.
- Control climàtic interior, a partir de controlar la ventilació o l'àrea efectiva de les finestres de l'edifici. A més, aquesta modelització també permet ampliar el control als efectes del vent o a la concentració interior de l'aire.

En aquest context, el present projecte tenia com a objectiu principal realitzar l'estudi teòric de la modelització estocàstica utilitzant *grey-box* per a la dinàmica de calor d'edificis, així com de mètodes d'estimació de paràmetres, per poder-ho aplicar sobre unes observacions realitzades d'un habitatge. Gràcies a l'ús de bibliografia especialitzada i a l'aplicació de tots els conceptes analitzats al *software* estadístic R, es pot concloure que aquest objectiu s'ha aconseguit.

Inicialment, per tal de definir quina modelització estocàstica utilitzar, s'han estudiat les diferències entre els models en temps discret i en temps continu, analitzant quines variacions tenen la part dinàmica i la part de mesura de cada un d'ells. Malgrat que les dades a implementar són equiespaiades, s'ha optat per seleccionar el model en temps continu, que és lineal i Gaussià, característiques necessàries per poder implementar el filtre de Kalman més endavant. El fet de ser Gaussià ve determinat per la distribució que segueixen els termes de l'error, que és una Normal amb mitjana 0.

Per poder realitzar la modelització, però, és necessari també definir quines tècniques cal utilitzar per a l'estimació dels paràmetres d'aquest model. Amb aquesta finalitat, s'ha analitzat el mètode d'estimació Màxim Versemblant, que té com a objectiu trobar els valors dels paràmetres que maximitzen el logaritme de la funció de versemblança. A més, aquest mètode es combina també amb el filtre de Kalman, un algoritme que permet estimar variables d'estat no observables a partir de variables observables que poden contenir algun error en la mesura. Per poder-lo aplicar, és necessari que el model sigui lineal i Gaussià, condicions mencionades anteriorment. Cal especificar que el filtre de Kalman es pot aplicar en temps discret i en temps continu. En aquest estudi s'ha implementat la segona versió.

Un cop definida la modelització a utilitzar i els mètodes d'estimació de paràmetres, s'ha procedit a l'anàlisi de les dades observades en un habitatge de la ciutat d'Enschede, als Països Baixos. Aquestes dades es basen en observacions de quatre variables: la temperatura interior de la sala mesurada, la quantitat de calor total de tots els escalfadors elèctrics de l'edifici, la radiació global i la temperatura ambient.

L'ús de la metodologia *grey-box* permet la diferenciació de diverses seccions de l'edifici. Partint del model més simple, que té com a única variable d'estat la temperatura interior, es pretén anar afegint i combinant diferents seccions de l'habitatge per veure aquella que millor representi les dades. Les seccions estudiades són l'interior de l'edifici, el medi (parets interiors i mobles), els calefactores, la part solar (entrada de calor a partir de la radiació solar), la coberta de l'edifici i l'ambient.

Considerant aquestes parts, el model pot arribar a incloure fins a quatre variables d'estat, on cada una representa la temperatura d'alguna part de l'edifici. A més, cada una d'aquestes parts té associades també diferents propietats tèrmiques a considerar, com les resistències i capacitats calorífiques o l'àrea efectiva de finestra. És en l'estimació del valor d'aquestes propietats, i altres paràmetres estadístics del model, on s'usen l'estimació Màxim Versemblant i el filtre de Kalman.

Computacionalment, per poder realitzar tota l'anàlisi s'ha utilitzat el *software* estadístic R i, en concret, la llibreria CTSM (*Continuous Time Stochastic Modeling*), que proporciona un marc per a la identificació i estimació de models estocàstics *grey-box*. La base matemàtica que segueixen les funcions d'aquesta llibreria són els models estocàstics en temps continu lineals i Gaussians, l'estimació Màxim Versemblant i el filtre de Kalman en temps continu.

A continuació, s'ha realitzat l'estimació dels diferents models, des del més simple, que considera només la temperatura interior com a variable d'estat, al model més complet, on es tenen les quatre variables d'estat possibles (temperatures de l'interior, de la coberta, del calefactor i del medi). Per poder dur a terme aquests processos, és necessari definir un valor inicial, així com un límit inferior i un superior per a cada paràmetre. En aquesta tasca és on han sorgit la majoria dels problemes en el desenvolupament de l'anàlisi de les dades, ja que petites variacions en els valors establerts poden causar grans modificacions en els resultats.

En aquesta situació, un cop es tenien els models calculats es va observar com aquell que es considerava millor, segons el Test de Raó de Versemblança, no trobava un òptim real i que, a més, tenia sobreparametrització (alguns paràmetres no eren significatius). Modificant lleugerament els límits de cada paràmetre, però, finalment es van aconseguir resultats més coherents.

Després d'arreglar aquestes desviacions i obtenir millors resultats, ha estat necessari utilitzar el Test de Raó de la Versemblança. Aquesta prova estadística compara dos models niuats, un de més simple que l'altre, i permet seleccionar quin és millor representant de les dades. Aplicant aquest criteri entre els diferents models estudiats, s'ha escollit el model TiTeTh com al millor. Aquest, que és el que considera les temperatures de l'interior, de la coberta i dels calefactores, té tots els paràmetres significatius, troba un òptim real i els límits establerts per a cada paràmetre són correctes. A més, els residus obtinguts no tenen autocorrelació i segueixen una distribució Normal amb mitjana 0.

Fent referència a la interpretació dels paràmetres estimats, s'ha realitzat l'anàlisi de les resistències tèrmiques, que és el valor físic que quantifica el flux de calor entre dos medis quan hi ha un diferencial de temperatura, i de les capacitats calorífiques, que és el valor físic que mesura la quantitat de calor que produeix un canvi, d'un grau centígrad, en la temperatura d'una secció. Observant els valors obtinguts en la capacitat calorífica de la coberta de l'edifici i la resistència entre aquesta i l'ambient, s'ha pogut concloure que l'habitatge està construït amb un material aïllant, ja que les dues propietats tenen valors elevats i, com a conseqüència, hi ha poca pèrdua de calor. Aquest fet fonamenta que l'edifici estigui valorat amb una Qualificació Energètica A.

A més, també es pot observar com la resistència tèrmica entre l'interior i la coberta de l'edifici té un valor molt baix. Per tant, les temperatures en les dues seccions tendeixen a equilibrar-se. A partir de l'ús de la tècnica del filtrat, s'han obtingut l'estimacions de les sèries temporals de les temperatures de l'interior i la coberta i s'ha pogut comprovar com ambdues tenen patrons semblants.

Cal remarcar que la utilització del filtrat, a partir del qual es poden calcular els valors de les temperatures de la coberta i del calefactor (variables d'estat del model no observades), permet implementar mecanismes de control on-line, com ara termòstats que activin la calefacció en base de l'estimació de T_h .

En últim lloc, i per poder observar les diferències entre modelització estocàstica i determinista, s'han

calculat les expressions matemàtiques per a cada temperatura en el segon cas. Per una banda, s'ha suposat que no es tenien dades observades i, per altra, que tan sols es coneix la mitjana de la temperatura ambient. En la primera situació s'ha pogut observar com les tres variables d'estat, amb el pas del temps, acabaven tendint a un valor molt proper a 0°C. En canvi, en la segona situació, el valor de les tres variables d'estat tendia prop de la mitjana de la temperatura ambient.

Ja per finalitzar, es pot concloure que tots els objectius establerts a l'inici de l'estudi s'han aconseguit. Ha estat possible entendre la modelització estocàstica *grey-box* així com diferents metodologies d'estimació de paràmetres. A més, s'han pogut implementar tots aquests conceptes per desenvolupar, utilitzant dades reals, l'estudi de les dinàmiques tèrmiques d'un edifici. S'han estudiat diferents models, seleccionant com el millor model aquell que tenia més bones propietats estadístiques. També s'ha realitzat la comparativa del model escollit amb un de determinista.

Com a línies de continuació d'aquest treball, cal ressenyar:

- Cerca d'un model general per a les dinàmiques de calor d'una zona, com podria ser el barri on es troba l'edifici estudiat.
- Millora del codi de la llibreria CTSM, per tal d'obtenir resultats factibles en l'allisat.
- Comparativa del model obtingut amb el seleccionat utilitzant dades en una època diferent de l'any. Cerca també d'un model a partir de les dades anuals.
- Cerca d'un model determinista considerant totes les observacions i comparativa amb el model obtingut en aquest estudi.

Bibliografia

- [1] Peder Bacher and Henrik Madsen. Identifying suitable models for the heat dynamics of buildings. *Energy and Buildings*, 43(7):1511–1522, 2011.
- [2] Inmaculada Baldoma Barraca. *Apunts de l'assignatura d'Equacions Diferencials Ordinàries*. 2018.
- [3] James Durbin and Siem Jan Koopman. *Time series analysis by state space methods*. Oxford university press, 2012.
- [4] Amirreza Fateh, Davide Borelli, Alessandro Spoladore, and Francesco Devia. A state-space analysis of a single zone building considering solar radiation, internal radiation, and pcm effects. *Applied Sciences*, 9(5):832, 2019.
- [5] Hassan Harb, Neven Boyanov, Luis Hernandez, Rita Streblow, and Dirk Müller. Development and validation of grey-box models for forecasting the thermal response of occupied buildings. *Energy and Buildings*, 117:199–207, 2016.
- [6] ISO ISBN. 92-67-10188-9 guide to the expression of uncertainty in measurement, 1993.
- [7] Miguel J Jimenez and Henrik Madsen. Models for describing the thermal characteristics of building components. *Building and Environment*, 43(2):152–162, 2008.
- [8] Rune Juhl, Niels Rode Kristensen, Peder Bacher, Jan Kloppenborg, and Henrik Madsen. Ctsm-r user guide. *Technical University of Denmark*, 2, 2013.
- [9] Rune Juhl, Niels Rode Kristensen, Peder Bacher, Jan Kloppenborg, and Henrik Madsen. Grey-box modeling of the heat dynamics of a building with ctsm-r. 2017.
- [10] Rune Juhl, Niels Rode Kristensen, Peder Bacher, Jan Kloppenborg, and Henrik Madsen. Simple example of gre-box modeling of the heat dynamics of a wall with ctsm-r. 2017.
- [11] Niels Rode Kristensen and Henrik Madsen. Continuous time stochastic modelling: Ctsm 2.3 mathematics guide. *Technical University of Denmark* <http://www2.imm.dtu.dk/ctsm/MathGuide.pdf>, 2003.
- [12] Niels Rode Kristensen, Henrik Madsen, and Sten Bay Jørgensen. Parameter estimation in stochastic grey-box models. *Automatica*, 40(2):225–237, 2004.
- [13] Ibán Naveros Mesa et al. *Modelling heat transfer for energy efficiency assessment of buildings: Identification of physical parameters*. Universidad de Granada, 2016.
- [14] Lu Ou, Michael D Hunter, and Sy-Miin Chow. What's for dynr: A package for linear and nonlinear dynamic modeling in r. *Journal of Statistical Software*, 2017.
- [15] Daniel Ryder-Cook. Thermal modelling of buildings. *Cambridge: UIT Cambridge*, 2009.
- [16] Robert H Shumway and David S Stoffer. *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer, 2017.

A. Codi i resultats dels models

Per poder realitzar aquesta anàlisi cal tenir instal·lat el següent paquet informàtic:

```
library(ctsmr)
setwd(".")
```

A més, es crearà una llista on guardar tots els paràmetres globals i es fixarà el nombre de *threads* a 1, que són els necessaris pels processos d'estimació:

```
param <- list()
param$threads <- 1
```

També cal llegir les diferents funcions que faran falta per a l'estudi següent:

```
files <- dir("./functions", full.name = TRUE)
for(i in 1:length(files)) source(files[i])
```

A continuació, es llegiran les dades que es troben en el document *Cas1.csv* i que es guardaran dins d'un data.frame:

```
dades <- read.csv("./Cas1.csv",
                  sep = ";", header = TRUE)
## dades$t són les hores des del començament de l'experiment
## Es crearà una columna en format POSIXct per poder realitzar gràfics
dades$timedate <- asP("2018-01-01 00:00:00") + dades$t*3600
```

Seguidament, es representaran les sèries temporals, usant alguna de les funcions que s'han llegit anteriorment. Els gràfics resultants es poden veure a la figura A.0.1.

```
plotTSBeg(4)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
axis(2, pretty(scalerange(dades$yTi, 0.2)))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
axis(2, pretty(scalerange(dades$Ta, 0.2)))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
axis(2, pretty(scalerange(dades$Ph, 0.2)))
```

```
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kW", "m"^{2}))), yaxt = "n")

expression(paste("Ps", frac(kW, m^2)))

axis(2, pretty(scalerange(dades$Ps, 0.2)))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

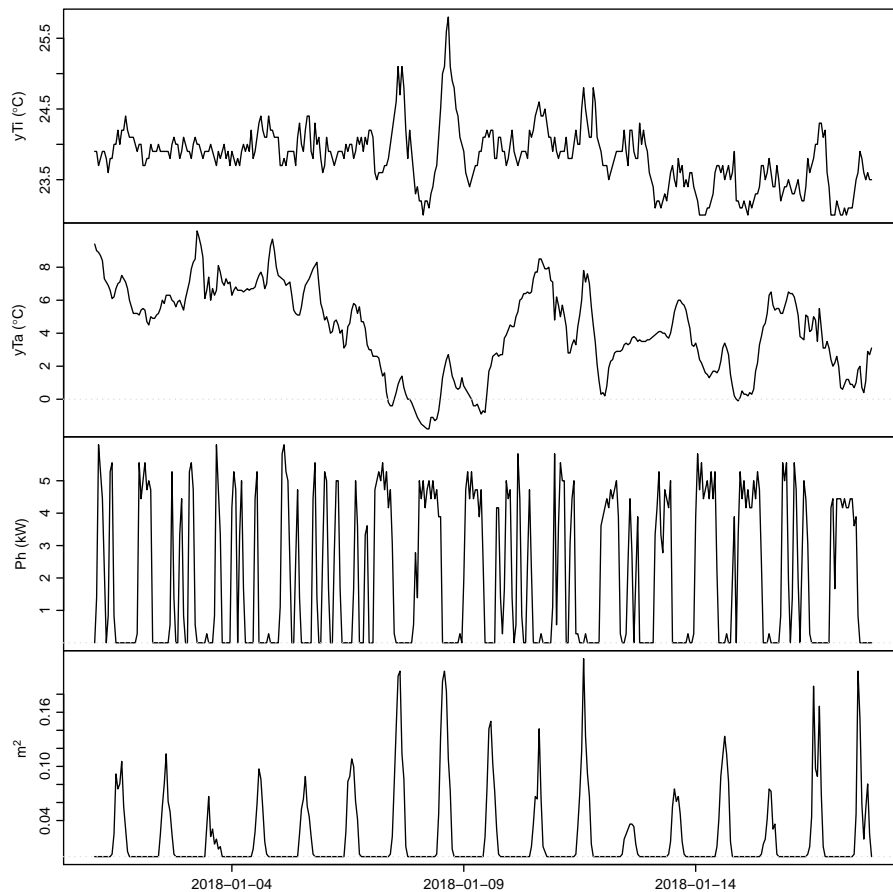


Figura A.0.1: Representació de les sèries temporals de les dades.

En les següents seccions es plantejaran els diferents models, considerant totes les possibles combinacions de les variables d'estat.

A.1 Model Ti

El model que es definirà té com a equació d'estat:

$$dT_i = \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTi <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTi$addSystem(dTi ~ ((Ta-Ti)/(Ci*Ria) + Aw*Ps/Ci + Ph/Ci)*dt + exp(p11)*dw11)
## Els inputs
modelTi$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTi$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTi$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTi$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTi$setParameter(Ci = c(init = 30.5, lb = 0.01, ub = 40))
modelTi$setParameter(Ria = c(init = 7, lb = 0.01, ub = 40))
modelTi$setParameter(Aw = c(init = 30.5, lb = 0.1, ub = 50))
modelTi$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTi$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))
```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTi$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model.

```
summary(fit, extended = TRUE)

## Coefficients:
##      Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)    dF/dPar dPen/dPar
```

```
## Ti0  2.3906e+01  1.7012e-01  1.4052e+02  0.0000e+00 -9.6927e-06  0.0002
## Aw   3.0484e+01  6.2858e+00  4.8497e+00  1.7867e-06 -4.9408e-06  0.0004
## Ci   3.0447e+01  1.9183e+00  1.5872e+01  0.0000e+00 -4.9812e-05  0.0013
## e11 -5.3325e+00  3.5902e-01 -1.4853e+01  0.0000e+00 -6.6434e-06  0.0000
## p11 -1.8715e+00  7.0926e-02 -2.6387e+01  0.0000e+00 -1.5963e-07  0.0000
## Ria  7.2931e+00  7.4961e-01  9.7291e+00  0.0000e+00  6.9502e-07  0.0000
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0   Aw    Ci    e11   p11
## Aw   -0.01
## Ci   -0.01 -0.13
## e11   0.01  0.14 -0.01
## p11  -0.02 -0.13  0.01 -0.74
## Ria   0.00 -0.53  0.08 -0.08  0.07
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.1.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF",col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))
```

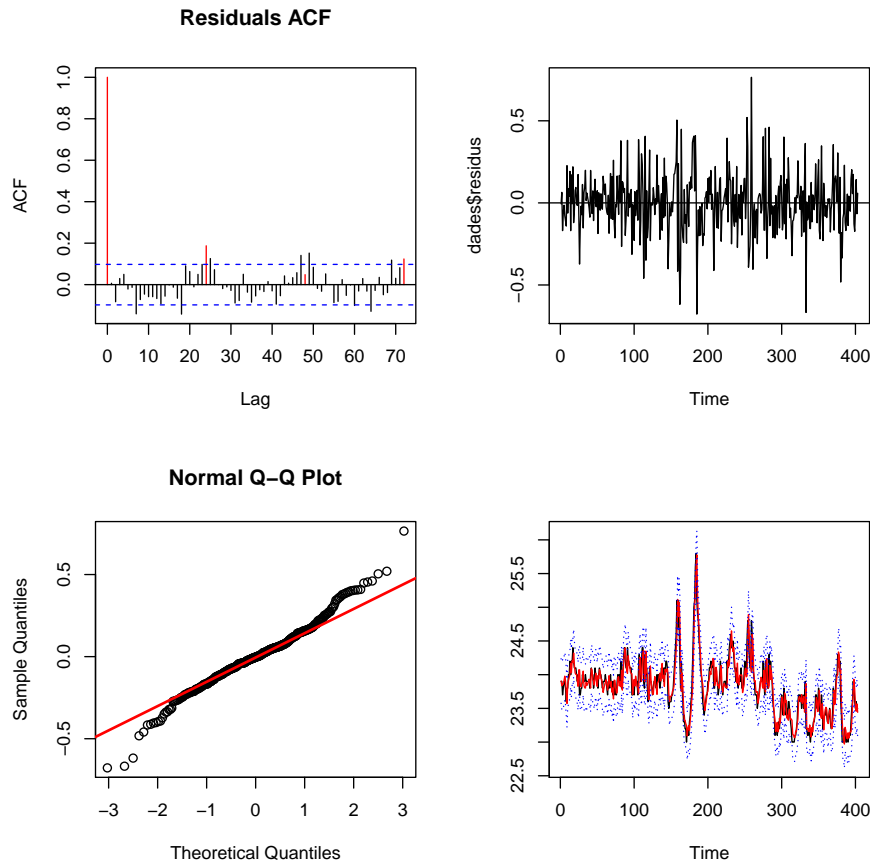


Figura A.1.1: Representació dels residus en el model T_i .

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.1.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi ( " * degree * C * ")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi ( " * degree * C * ")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
```

```

        expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kW", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")

```

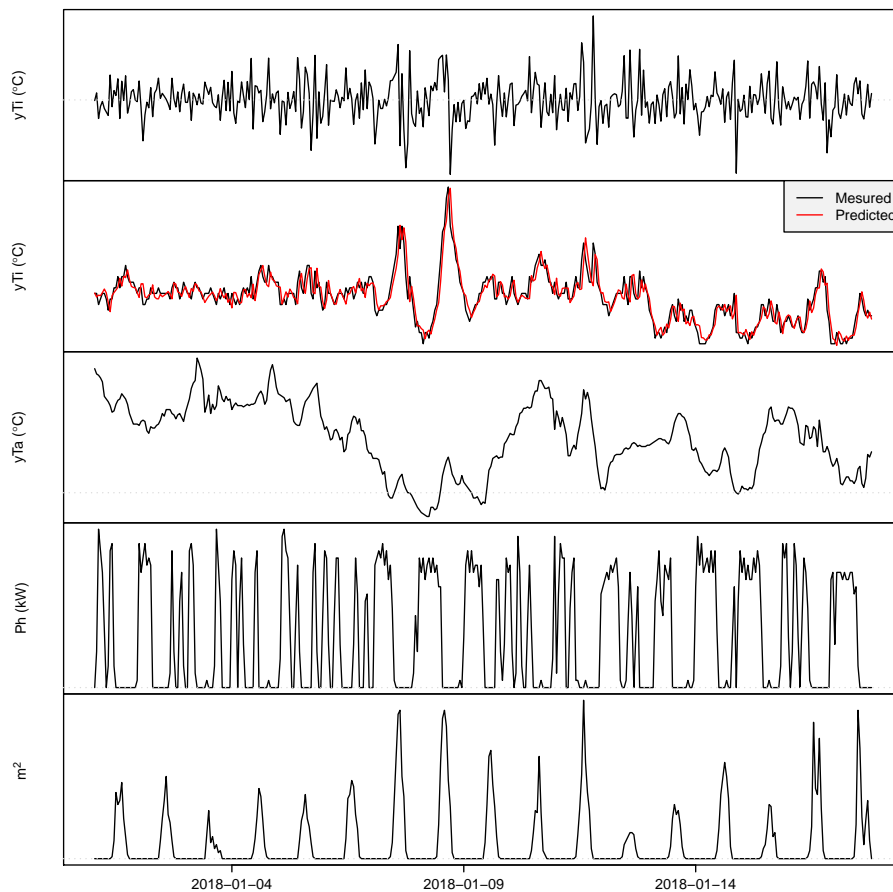


Figura A.1.2: Representació de les sèries resultants en el model Ti.

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM
```

```
## [1] 6
```

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik
## [1] 114.0731
```

A.2 Model TiTe

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$dT_i = \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i$$

$$dT_e = \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTiTe <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTiTe$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rie)*(Te-Ti) + Aw/Ci*Ps + 1/Ci*Ph)*dt
+ exp(p11)*dw1)
modelTiTe$addSystem(dTe ~ (1/(Ce*Rie)*(Ti-Te) + 1/(Ce*Rea)*(Ta-Te))*dt
+ exp(p22)*dw2)
## Els inputs
modelTiTe$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTiTe$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTiTe$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTiTe$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))
modelTiTe$setParameter(Te = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTiTe$setParameter(Ci = c(init = 30.5, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTe$setParameter(Ce = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
```

```
modelTiTe$setParameter(Rie = c(init = 7, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTe$setParameter(Rea = c(init = 7, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTe$setParameter(Aw = c(init = 30.5, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiTe$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTe$setParameter(p22 = c(init = 2, lb = -50, ub = 10))
modelTiTe$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))
```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTiTe$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de dos estats.

```
summary(fit, extended = TRUE)
```

```
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error  t value  Pr(>|t|)    dF/dPar dPen/dPar
## Ti0  2.3900e+01  1.4035e-01  1.7029e+02  0.0000e+00  1.4157e-05  2e-04
## Te0  2.3937e+01  3.1567e-01  7.5829e+01  0.0000e+00 -1.2263e-05  2e-04
## Aw   3.3582e+01  6.2709e+00  5.3552e+00  1.4695e-07 -4.6558e-08  6e-04
## Ce   2.1732e+01  2.1682e+01  1.0023e+00  3.1681e-01 -2.8360e-07  3e-04
## Ci   1.2044e+01  2.0200e+01  5.9621e-01  5.5138e-01 -2.0283e-06  1e-04
## e11 -5.0635e+00  6.8650e-01 -7.3757e+00  1.0221e-12  8.0725e-06  0e+00
## p11 -1.0751e+01  3.6179e-01 -2.9716e+01  0.0000e+00  9.9235e-06  0e+00
## p22 -1.4280e+00  9.5377e-01 -1.4972e+00  1.3513e-01 -2.6832e-06  0e+00
## Rea  7.0914e+00  6.7886e-01  1.0446e+01  0.0000e+00  7.4368e-06  0e+00
## Rie  1.7913e-02  3.2229e-02  5.5580e-01  5.7867e-01  1.2787e-06  0e+00
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0  Te0  Aw  Ce  Ci  e11  p11  p22  Rea
## Te0  0.28
## Aw   0.05  0.00
## Ce  -0.01  0.01  0.24
## Ci   0.01 -0.01 -0.13 -0.97
## e11  0.02 -0.07 -0.02 -0.86  0.91
## p11  0.04 -0.04  0.13 -0.27  0.34  0.28
## p22  0.01 -0.01 -0.17 -0.99  0.99  0.88  0.33
## Rea -0.01  0.03 -0.44 -0.13  0.10  0.05 -0.05  0.11
## Rie  0.01 -0.06 -0.03 -0.88  0.93  0.93  0.49  0.92  0.05
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
```

```
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.2.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF",col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))
```

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.2.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kw", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
```

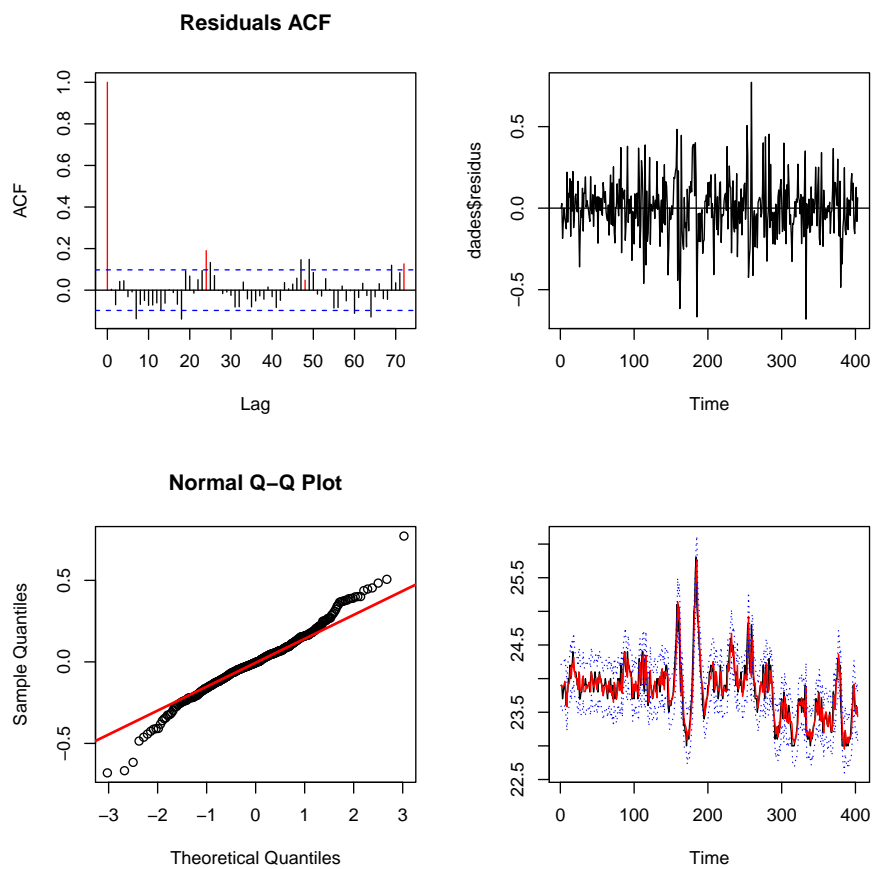


Figura A.2.1: Representació dels residus en el model TiTe.

```
plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM  
## [1] 10
```

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik  
## [1] 114.9891
```

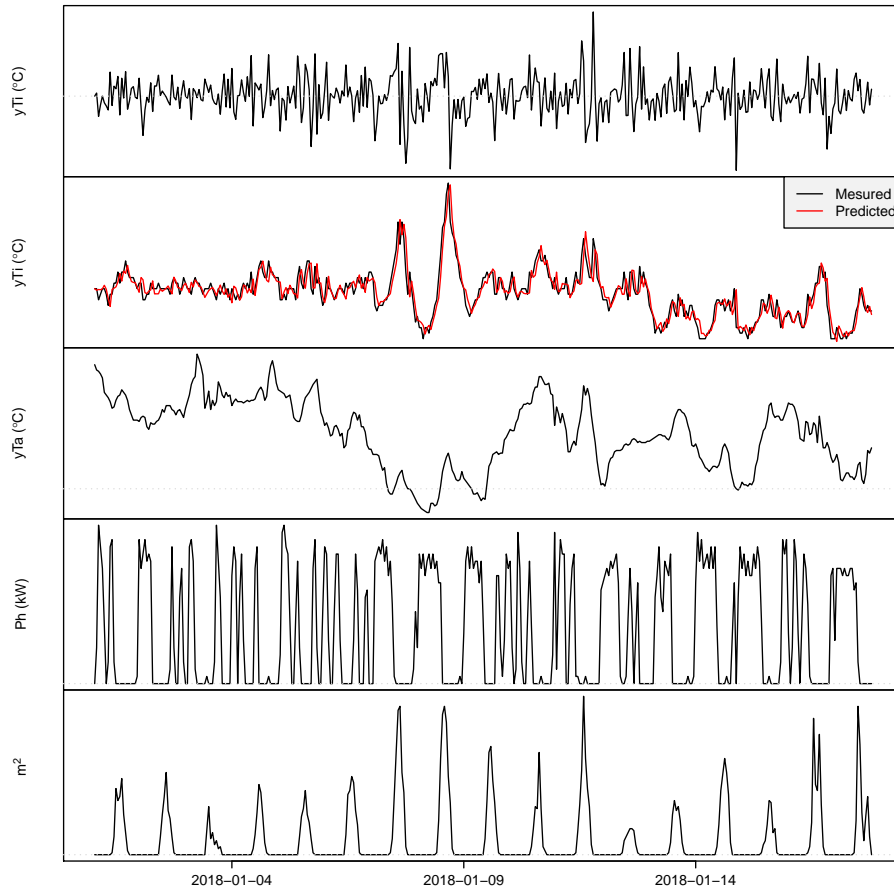



Figura A.2.2: Representació de les sèries resultants en el model TiTe.

A.3 Model TiTh

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$dT_i = \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i$$

$$dT_h = \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTiTh <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTiTh$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rih)*(Th-Ti) + (Ta-Ti)/(Ci*Ria) + Aw/Ci*Ps)*dt
+ exp(p11)*dw1)
modelTiTh$addSystem(dTh ~ (1/(Ch*Rih)*(Ti-Th)+ 1/Ch*Ph)*dt + exp(p22)*dw2)
## Els inputs
```

```
modelTiTh$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTiTh$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTiTh$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTiTh$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))
modelTiTh$setParameter(Th = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTiTh$setParameter(Ci = c(init = 30.5, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTh$setParameter(Ch = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTh$setParameter(Rih = c(init = 7, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTh$setParameter(Ria = c(init = 7.3, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTh$setParameter(Aw = c(init = 30.5, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiTh$setParameter(p11 = c(init = -1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTh$setParameter(p22 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTh$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))
```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTiTh$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de dos estats.

```
summary(fit, extended = TRUE)
```

```
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)    dF/dPar dPen/dPar
## Ti0  2.3900e+01 1.5000e-01 1.5934e+02 0.0000e+00 5.1916e-07 2e-04
## Th0  2.4500e+01 3.3003e-01 7.4235e+01 0.0000e+00 -2.6890e-07 2e-04
## Aw   1.0199e+01 2.8339e+00 3.5990e+00 3.6056e-04 -9.5610e-08 0e+00
## Ch   2.1121e+01 4.2140e+00 5.0121e+00 8.2032e-07 -7.2543e-07 2e-04
## Ci   6.5181e+00 1.1621e+00 5.6091e+00 3.8818e-08 -4.6726e-08 0e+00
## e11 -7.9150e+00 8.5608e+00 -9.2456e-01 3.5576e-01 -1.4108e-08 0e+00
## p11 -1.6037e+00 1.1089e-01 -1.4462e+01 0.0000e+00 5.8166e-08 0e+00
```

```
## p22 -9.6930e+00  2.9908e+02 -3.2410e-02  9.7416e-01 -7.4220e-09  0e+00
## Ria  8.7079e+00  3.7005e-01  2.3532e+01  0.0000e+00 -1.4897e-07  0e+00
## Rih  4.5673e-01  1.0039e-01  4.5496e+00  7.1956e-06 -8.4071e-08  0e+00
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0   Th0   Aw    Ch    Ci    e11   p11   p22   Ria
## Th0 -0.02
## Aw   0.02 -0.43
## Ch  -0.03  0.01  0.23
## Ci   0.01 -0.33  0.51 -0.32
## e11  0.02  0.11 -0.18 -0.50  0.33
## p11 -0.02 -0.15  0.24  0.56 -0.36 -0.92
## p22 -0.01  0.01  0.05  0.16 -0.05 -0.08  0.09
## Ria -0.02  0.21 -0.70 -0.16 -0.38  0.14 -0.18 -0.02
## Rih -0.01  0.50 -0.83 -0.36 -0.44  0.39 -0.47 -0.06  0.61
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.3.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF", col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))
```

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.3.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)
```

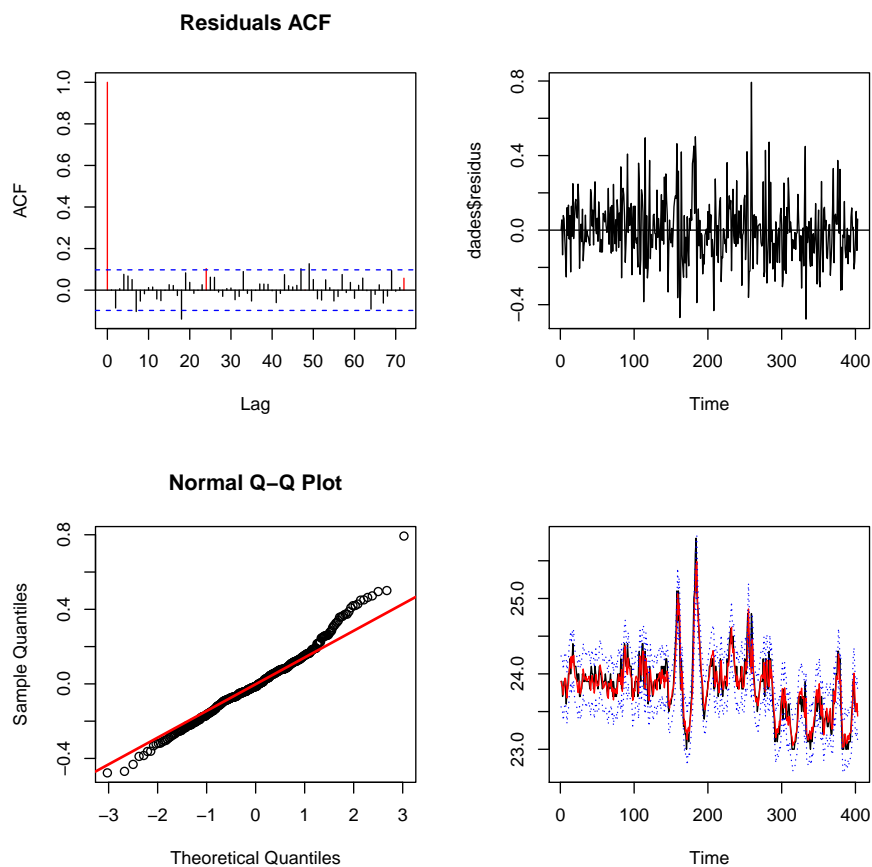


Figura A.3.1: Representació dels residus en el model TiTh.

```
plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
```

```
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kw", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

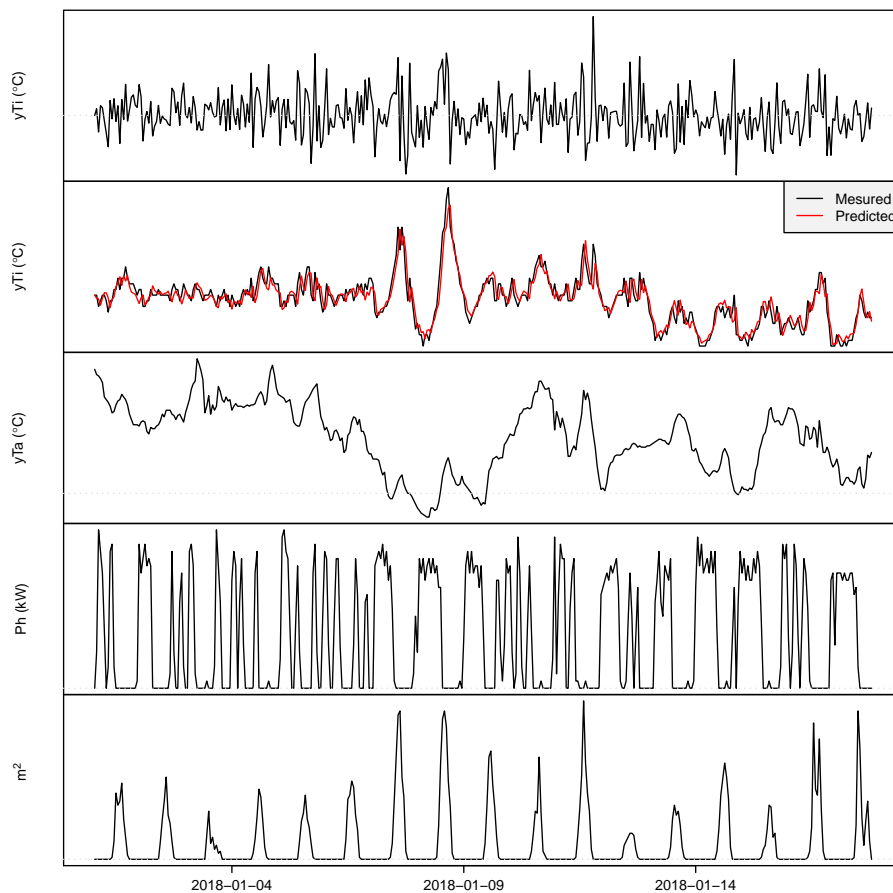


Figura A.3.2: Representació de les sèries resultants en el model TiTh.

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM

## [1] 10
```

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik  
## [1] 133.1669
```

A.4 Model TiTm

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$dT_i = \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i$$
$$dT_m = \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm  
modelTiTm <- ctsm$new()  
## Especificar el sistema d'equacions  
modelTiTm$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rim)*(Tm-Ti) + (Ta-Ti)/(Ci*Ria) + Aw/Ci*Ps  
+ 1/Ci*Ph)*dt + exp(p11)*dw1)  
modelTiTm$addSystem(dTm ~ (1/(Cm*Rim)*(Ti-Tm))*dt + exp(p22)*dw2)  
## Els inputs  
modelTiTm$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat  
modelTiTm$addObs(yTi ~ Ti)  
## Fixar la variància de l'error de mesura  
modelTiTm$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps  
modelTiTm$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))  
modelTiTm$setParameter(Tm = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))  
## Fixar valors inicials pels paràmetres  
modelTiTm$setParameter(Ci = c(init = 30.5, lb = 0.01, ub = 40))  
modelTiTm$setParameter(Cm = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))  
modelTiTm$setParameter(Rim = c(init = 7, lb = 0.001, ub = 40))
```

```
modelTiTm$setParameter(Ria = c(init = 7.3, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTm$setParameter(Aw = c(init = 30.5, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiTm$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTm$setParameter(p22 = c(init = 2, lb = -50, ub = 10))
modelTiTm$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))
```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTiTm$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de dos estats.

```
summary(fit, extended = TRUE)
```

```
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)    dF/dPar dPen/dPar
## Ti0  2.3900e+01  1.4003e-01  1.7068e+02  0.0000e+00 -6.4601e-05  2e-04
## Tm0  2.3977e+01  3.1529e-01  7.6049e+01  0.0000e+00  1.6851e-06  2e-04
## Aw   3.3435e+01  6.7136e+00  4.9801e+00  9.5846e-07  6.8399e-07  6e-04
## Ci   1.3367e+01  1.4549e+01  9.1873e-01  3.5880e-01  2.3122e-07  1e-04
## Cm   2.0428e+01  1.6326e+01  1.2512e+00  2.1159e-01  2.3596e-07  2e-04
## e11 -5.0091e+00  4.9870e-01 -1.0044e+01  0.0000e+00  1.3721e-06  0e+00
## p11 -1.0764e+01  3.3564e-01 -3.2069e+01  0.0000e+00  1.0004e-05  0e+00
## p22 -1.3659e+00  7.4456e-01 -1.8345e+00  6.7331e-02 -1.8679e-07  0e+00
## Ria  7.1126e+00  7.5143e-01  9.4654e+00  0.0000e+00  3.2937e-07  0e+00
## Rim  2.0735e-02  2.7546e-02  7.5273e-01  4.5206e-01  1.9657e-07  0e+00
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0  Tm0  Aw  Ci  Cm  e11  p11  p22  Ria
## Tm0  0.28
## Aw   0.06 -0.01
## Ci   0.00  0.17 -0.13
## Cm   0.01 -0.18  0.26 -0.94
## e11  0.00  0.14 -0.05  0.85 -0.79
## p11  0.03  0.09  0.15  0.27 -0.17  0.25
## p22  0.00  0.18 -0.19  0.99 -0.98  0.82  0.24
## Ria -0.03 -0.03 -0.50  0.08 -0.14  0.04 -0.08  0.10
## Rim  0.00  0.17 -0.05  0.89 -0.81  0.92  0.45  0.87  0.03
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.4.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF",col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))
```

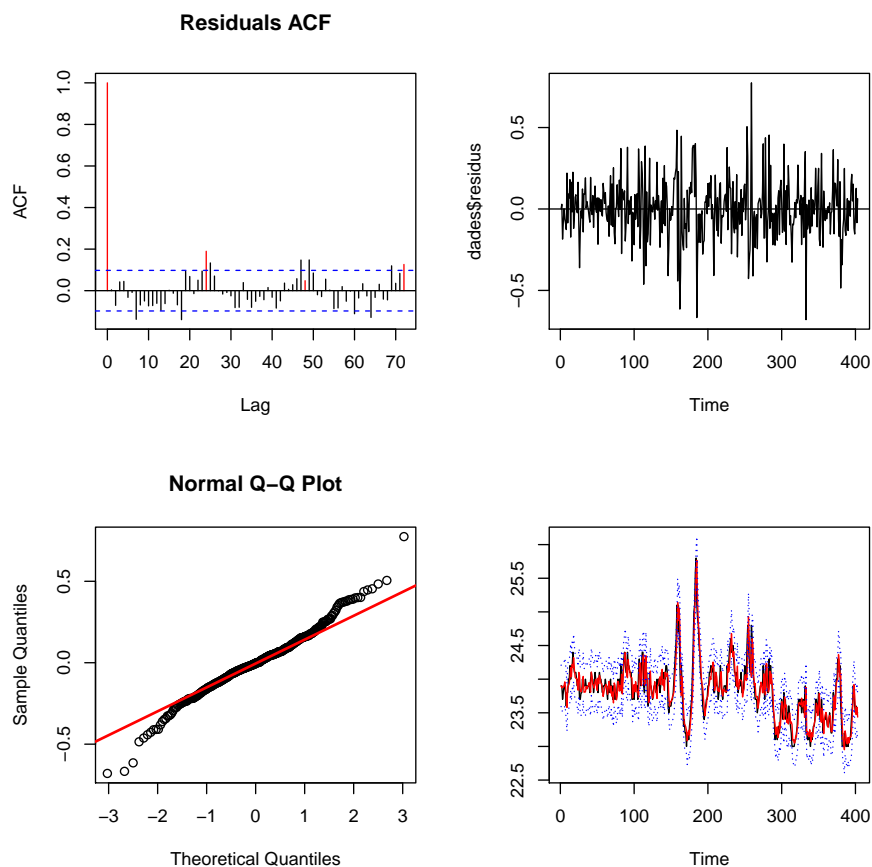


Figura A.4.1: Representació dels residus en el model TiTm.

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.4.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi ( " * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi ( " * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa ( " * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kw", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM

## [1] 10
```

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik

## [1] 115.1015
```

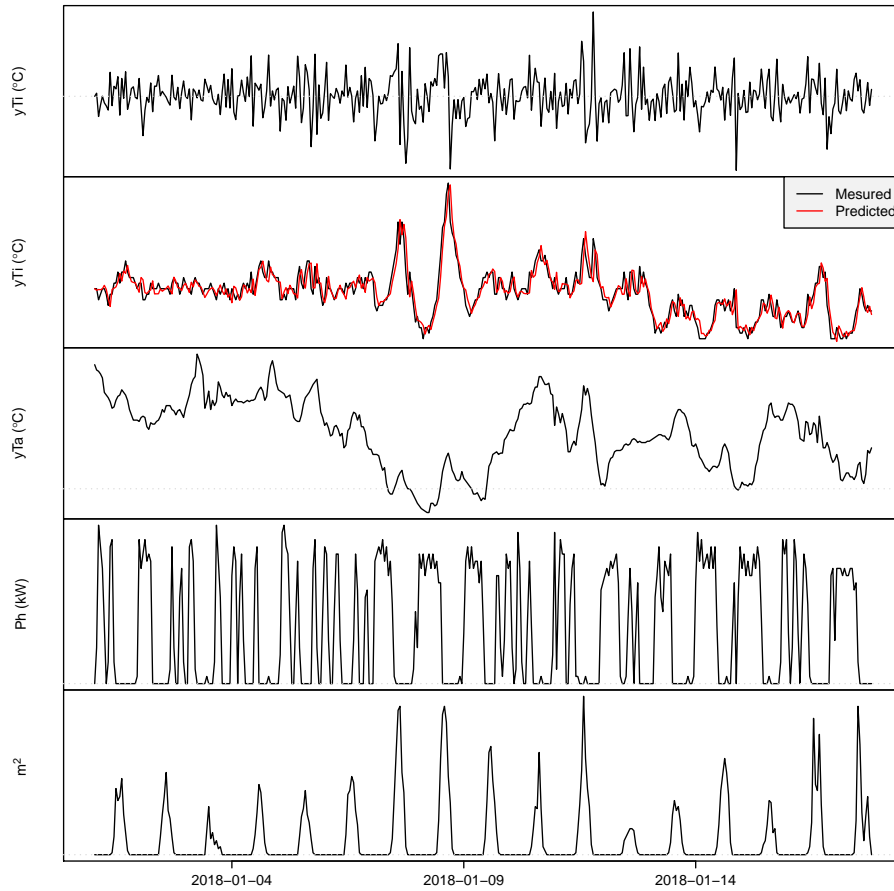


Figura A.4.2: Representació de les sèries resultants en el model TiTm.

A.5 Model TiTeTh

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$\begin{aligned}dT_i &= \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_sdt + \sigma_id\omega_i \\dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_ed\omega_e \\dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_hdt + \sigma_hd\omega_h\end{aligned}$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTiTeTh <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTiTeTh$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rih)*(Th-Ti) + 1/(Ci*Rie)*(Te-Ti)
                        + Aw/Ci*Ps)*dt + exp(p11)*dw1)
```

```

modelTiTeTh$addSystem(dTe ~ (1/(Ce*Rie)*(Ti-Te) + 1/(Ce*Rea)*(Ta-Te))*dt
+ exp(p22)*dw2)
modelTiTeTh$addSystem(dTh ~ (1/(Ch*Rih)*(Ti-Th)+ 1/Ch*Ph)*dt + exp(p33)*dw3)
## Els inputs
modelTiTeTh$addInput(Ta, Ps, Ph)

```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```

## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTiTeTh$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTiTeTh$setVariance(yTi ~ exp(e11))

```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```

## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTiTeTh$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))
modelTiTeTh$setParameter(Te = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
modelTiTeTh$setParameter(Th = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTiTeTh$setParameter(Ci = c(init = 6, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Ce = c(init = 12, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Ch = c(init = 13, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Rie = c(init = 0.5, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Rih = c(init = 1, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Rea = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Aw = c(init = 7, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiTeTh$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTh$setParameter(p22 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTh$setParameter(p33 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTh$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))

```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```

fit <- modelTiTeTh$estimate(data = dades, threads = param$threads)

```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de tres estats.

```

summary(fit, extended = TRUE)

## Coefficients:

```

```

##      Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)   dF/dPar dPen/dPar
## Ti0  2.3900e+01  1.6831e-01  1.4200e+02  0.0000e+00  7.3011e-02  2e-04
## Te0  2.3754e+01  3.7243e-01  6.3782e+01  0.0000e+00 -7.7440e-03  2e-04
## Th0  2.4764e+01  4.8463e-01  5.1099e+01  0.0000e+00  2.0767e-02  2e-04
## Aw   7.0841e+00  1.2831e+00  5.5208e+00  6.2366e-08 -2.9070e-03  0e+00
## Ce   7.0206e+00  2.8777e-01  2.4397e+01  0.0000e+00  5.3060e-01  0e+00
## Ch   1.2020e+01  2.4300e-01  4.9465e+01  0.0000e+00  2.2619e-01  1e-04
## Ci   1.8010e-01  4.0997e-02  4.3929e+00  1.4477e-05  2.4758e-01  0e+00
## e11 -4.8872e+00  4.2620e-01 -1.1467e+01  0.0000e+00 -4.5802e-03  0e+00
## p11 -9.3139e+00  2.3126e-01 -4.0275e+01  0.0000e+00 -1.1471e-02  0e+00
## p22 -1.7186e+00  9.0721e-02 -1.8943e+01  0.0000e+00  6.2139e-02  0e+00
## p33 -6.8004e+00  4.2709e-01 -1.5923e+01  0.0000e+00  3.9445e-03  0e+00
## Rea  8.7992e+00  1.0821e-01  8.1316e+01  0.0000e+00 -7.1416e-01  0e+00
## Rie  2.2407e-01  6.0313e-02  3.7151e+00  2.3306e-04  3.0631e-01  0e+00
## Rih  8.5577e-01  1.2354e-01  6.9268e+00  1.8494e-11  7.3371e-02  0e+00
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0  Te0  Th0  Aw  Ce  Ch  Ci  e11  p11  p22  p33
## Te0  0.49
## Th0  0.10 -0.48
## Aw  -0.30 -0.09 -0.20
## Ce  -0.47 -0.14 -0.34  0.62
## Ch  -0.47 -0.25 -0.12  0.56  0.82
## Ci  -0.52 -0.23 -0.24  0.62  0.92  0.94
## e11  0.42  0.14  0.24 -0.45 -0.78 -0.75 -0.85
## p11  0.01  0.02 -0.06  0.11  0.02 -0.05  0.04 -0.04
## p22 -0.28 -0.15 -0.11  0.24  0.50  0.44  0.54 -0.77  0.05
## p33 -0.46 -0.18 -0.26  0.41  0.71  0.74  0.82 -0.86  0.02  0.49
## Rea -0.09 -0.01 -0.16 -0.08  0.14  0.05  0.11 -0.17 -0.41  0.22  0.20
## Rie  0.50  0.22  0.23 -0.64 -0.93 -0.94 -0.99  0.81 -0.05 -0.47 -0.78
## Rih  0.49  0.16  0.36 -0.62 -0.95 -0.79 -0.94  0.84 -0.16 -0.60 -0.76
##      Rea  Rie
## Te0
## Th0
## Aw
## Ce
## Ch
## Ci
## e11
## p11
## p22
## p33
## Rea
## Rie  0.01
## Rih -0.15  0.92

```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.5.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF",col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))
```

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.5.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
```

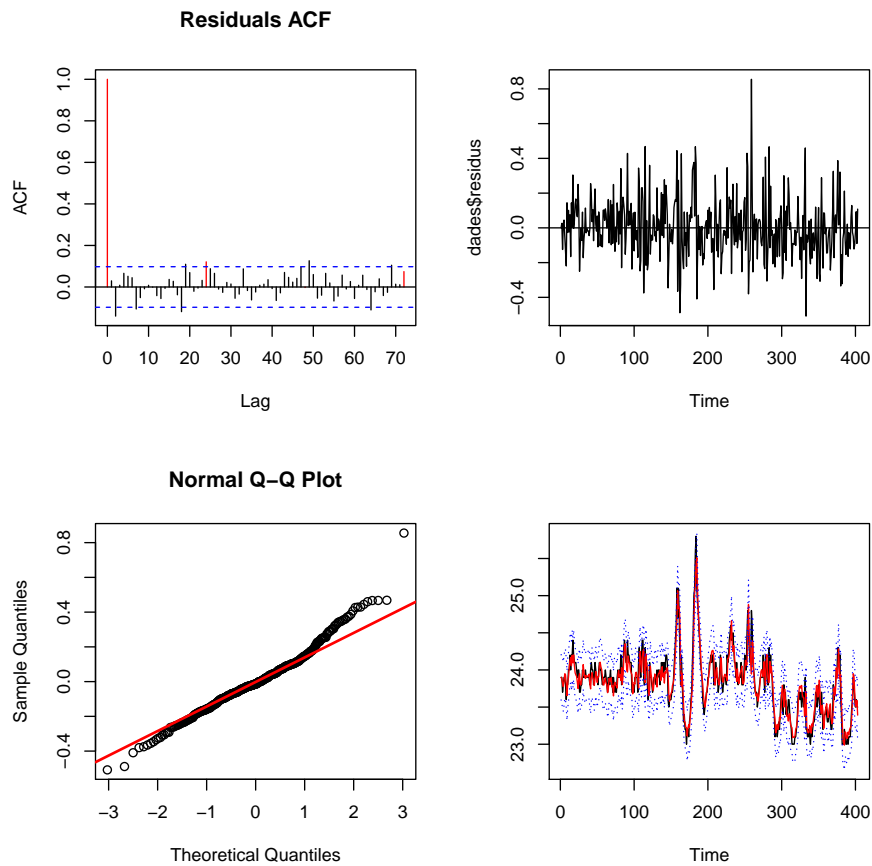


Figura A.5.1: Representació dels residus en el model TiTeTh.

```
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kw", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM

## [1] 14
```

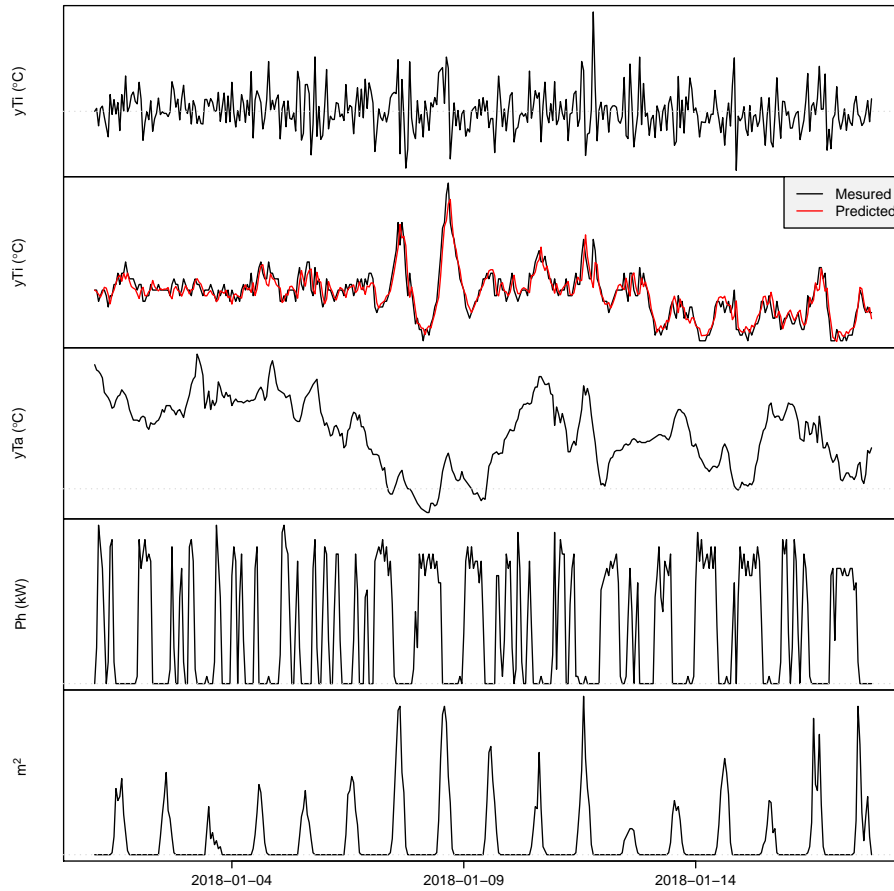


Figura A.5.2: Representació de les sèries resultants en el model TiTeTh.

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik
## [1] 139.3091
```

A.6 Model TiTeTm

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$\begin{aligned}
 dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \frac{1}{C_i}\phi_h dt + \sigma_i d\omega_i \\
 dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e \\
 dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m
 \end{aligned}$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTiTeTm <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTiTeTm$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rim)*(Tm-Ti) + 1/(Ci*Rie)*(Te-Ti)
                          + Aw/Ci*Ps + 1/Ci*Ph)*dt + exp(p11)*dw1)
modelTiTeTm$addSystem(dTe ~ (1/(Ce*Rie)*(Ti-Te) + 1/(Ce*Rea)*(Ta-Te))*dt
                      + exp(p22)*dw2)
modelTiTeTm$addSystem(dTm ~ (1/(Cm*Rim)*(Ti-Tm))*dt + exp(p33)*dw3)
## Els inputs
modelTiTeTm$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTiTeTm$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTiTeTm$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTiTeTm$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))
modelTiTeTm$setParameter(Te = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
modelTiTeTm$setParameter(Tm = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTiTeTm$setParameter(Ci = c(init = 20, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTm$setParameter(Ce = c(init = 20, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTm$setParameter(Cm = c(init = 30, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTm$setParameter(Rie = c(init = 1, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTeTm$setParameter(Rim = c(init = 1, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTeTm$setParameter(Rea = c(init = 7, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTm$setParameter(Aw = c(init = 35, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiTeTm$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTm$setParameter(p22 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTm$setParameter(p33 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTm$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))
```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTiTeTm$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de tres estats.


```
summary(fit, extended = TRUE)
```

```
## Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	dF/dPar	dPen/dPar
Ti0	2.3900e+01	1.5619e-01	1.5302e+02	0.0000e+00	3.5560e-07	0.0002
Te0	2.2558e+01	9.6513e-01	2.3373e+01	0.0000e+00	-9.1543e-07	0.0002
Tm0	2.4043e+01	3.9135e-01	6.1437e+01	0.0000e+00	6.2856e-07	0.0002
Aw	4.3223e+01	7.4837e+00	5.7757e+00	1.5898e-08	-8.6286e-07	0.0047
Ce	3.9746e+01	1.2622e+00	3.1489e+01	0.0000e+00	4.6677e-06	2.4655
Ci	1.4330e+01	1.8835e+01	7.6079e-01	4.4724e-01	3.1709e-08	0.0001
Cm	2.0443e+01	2.1510e+01	9.5037e-01	3.4252e-01	1.0458e-06	0.0002
e11	-5.1275e+00	7.7178e-01	-6.6437e+00	1.0607e-10	9.5722e-07	0.0000
p11	-9.6819e+00	6.2913e+00	-1.5389e+00	1.2464e-01	4.7017e-06	0.0000
p22	-9.8796e+00	1.3624e+02	-7.2516e-02	9.4223e-01	-2.3912e-07	0.0000
p33	-1.2587e+00	9.6751e-01	-1.3010e+00	1.9402e-01	-2.2395e-07	0.0000
Rea	6.0035e+00	6.8380e-01	8.7795e+00	0.0000e+00	-4.5922e-07	0.0000
Rie	4.6756e-01	1.9342e-01	2.4174e+00	1.6094e-02	-1.9361e-07	0.0000
Rim	2.0775e-02	3.2035e-02	6.4852e-01	5.1703e-01	7.2167e-08	0.0000

```
##
```

```
## Correlation of coefficients:
```

	Ti0	Te0	Tm0	Aw	Ce	Ci	Cm	e11	p11	p22	p33
Te0	-0.03										
Tm0	0.32	-0.28									
Aw	-0.03	0.12	0.05								
Ce	-0.02	-0.01	-0.06	-0.08							
Ci	0.01	0.09	0.28	0.04	-0.26						
Cm	-0.01	-0.08	-0.29	0.04	0.24	-0.97					
e11	0.01	0.05	0.23	0.05	-0.26	0.88	-0.83				
p11	0.00	0.05	0.17	-0.04	-0.11	0.57	-0.60	0.46			
p22	0.00	0.05	0.19	-0.04	-0.13	0.63	-0.66	0.53	1.00		
p33	0.01	0.10	0.29	0.02	-0.24	0.99	-0.99	0.85	0.59	0.65	
Rea	0.04	-0.03	0.07	-0.38	0.04	0.06	-0.10	0.00	0.07	0.07	0.08
Rie	0.02	-0.37	-0.10	-0.47	-0.03	-0.03	0.01	0.07	-0.02	-0.01	-0.06
Rim	0.01	0.07	0.26	0.07	-0.23	0.91	-0.87	0.94	0.48	0.55	0.90

```
##      Rea      Rea
```

```
## Te0
```

```
## Tm0
```

```
## Aw
```

```
## Ce
```

```
## Ci
```

```
## Cm
```

```
## e11
```

```
## p11
```

```
## p22
```

```
## p33
```

```
## Rea
```

```
## Rie -0.05
## Rim  0.04 -0.02
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.6.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF",col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))
```

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.6.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
```

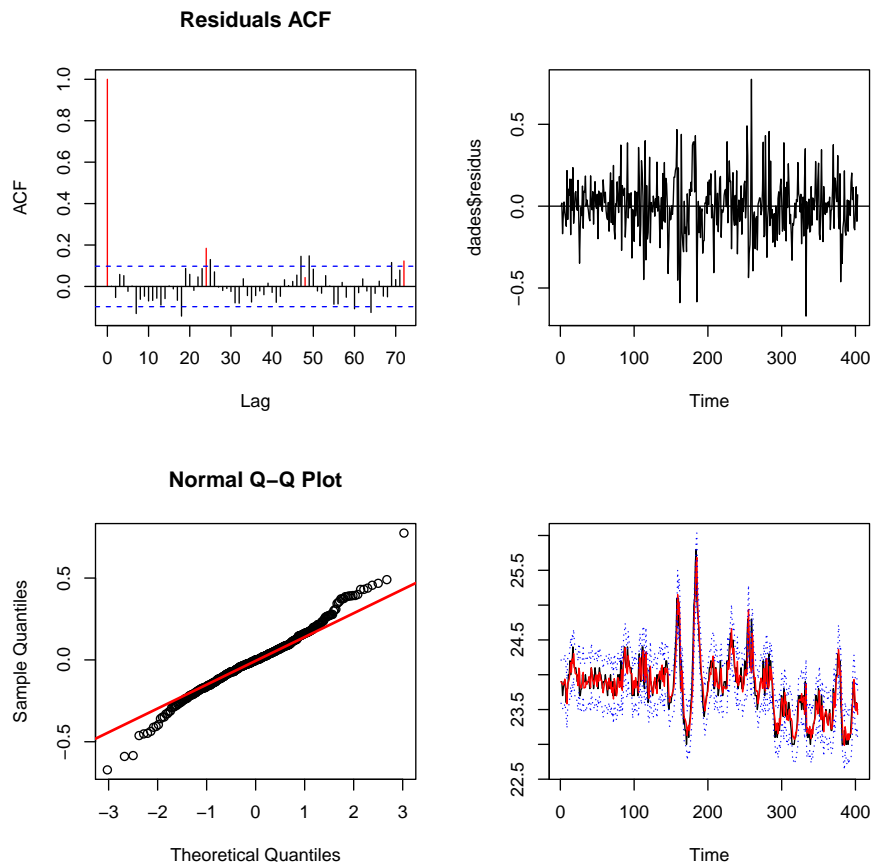


Figura A.6.1: Representació dels residus en el model TiTeTm.

```
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kW", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM

## [1] 14
```

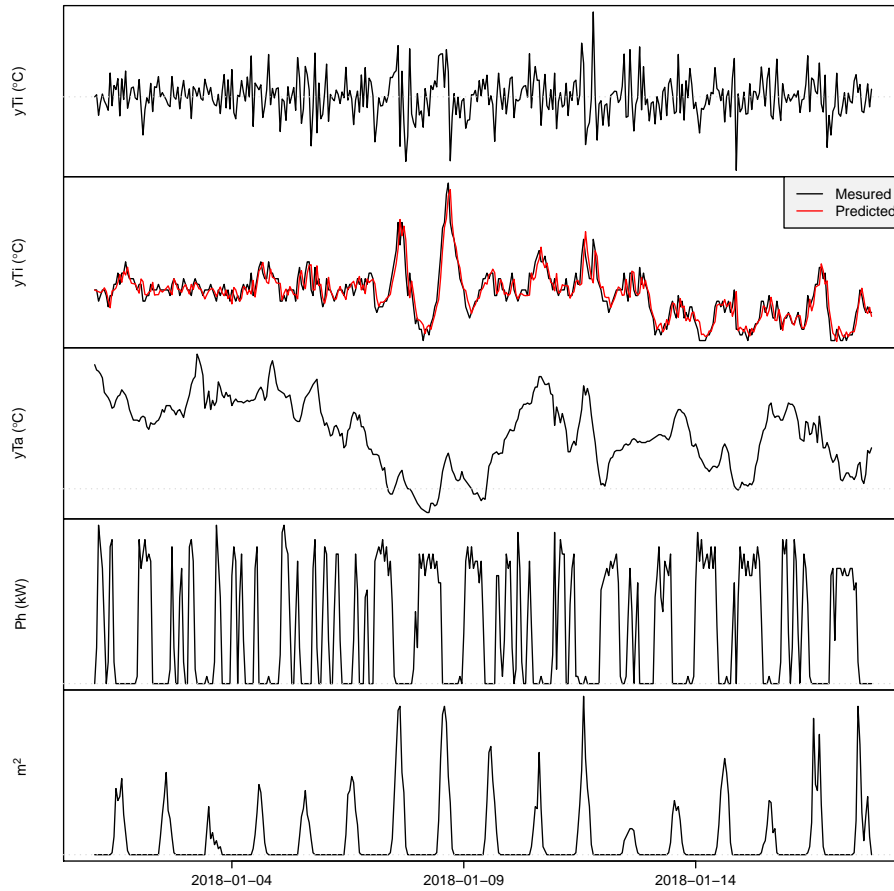


Figura A.6.2: Representació de les sèries resultants en el model TiTeTm.

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik
## [1] 118.0187
```

A.7 Model TiThTm

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$\begin{aligned}
 dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{R_{ia}C_i}(T_a - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_sdt + \sigma_id\omega_i \\
 dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_hdt + \sigma_hd\omega_h \\
 dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_md\omega_m
 \end{aligned}$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTiThTm <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTiThTm$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rih)*(Th-Ti) + (Ta-Ti)/(Ci*Ria) + Aw/Ci*Ps
                        + 1/(Ci*Rim)*(Tm-Ti))*dt + exp(p11)*dw1)
modelTiThTm$addSystem(dTh ~ (1/(Ch*Rih)*(Ti-Th) + 1/Ch*Ph)*dt + exp(p22)*dw2)
modelTiThTm$addSystem(dTm ~ (1/(Cm*Rim)*(Ti-Tm))*dt + exp(p33)*dw3)
## Els inputs
modelTiThTm$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTiThTm$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTiThTm$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTiThTm$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = -20, ub = 45))
modelTiThTm$setParameter(Th = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
modelTiThTm$setParameter(Tm = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTiThTm$setParameter(Ci = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiThTm$setParameter(Ch = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiThTm$setParameter(Cm = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiThTm$setParameter(Rih = c(init = 1, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiThTm$setParameter(Rim = c(init = 1, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiThTm$setParameter(Ria = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiThTm$setParameter(Aw = c(init = 10, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiThTm$setParameter(p11 = c(init = -2, lb = -50, ub = 10))
modelTiThTm$setParameter(p22 = c(init = -2, lb = -50, ub = 10))
modelTiThTm$setParameter(p33 = c(init = -2, lb = -50, ub = 10))
modelTiThTm$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))
```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTiThTm$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de tres estats.

```
summary(fit, extended = TRUE)
```

```
## Coefficients:
##      Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)    dF/dPar dPen/dPar
## Ti0  2.3902e+01  1.7396e-01  1.3740e+02  0.0000e+00  7.2775e-07  0.0002
## Th0  2.4141e+01  3.5863e-01  6.7314e+01  0.0000e+00 -1.2306e-05  0.0002
## Tm0  3.0590e+01  1.7256e+01  1.7727e+00  7.7054e-02 -1.4291e-05  0.0006
## Aw   9.4267e+00  2.6533e+00  3.5527e+00  4.2838e-04 -1.7584e-06  0.0000
## Ch   2.0242e+01  5.6961e+00  3.5537e+00  4.2695e-04  7.7470e-07  0.0002
## Ci   5.8968e+00  1.3688e+00  4.3081e+00  2.0932e-05 -5.6852e-07  0.0000
## Cm   3.0635e+01  9.1859e+01  3.3350e-01  7.3894e-01 -1.9119e-06  0.0014
## e11 -7.0273e+00  3.3796e+00 -2.0793e+00  3.8244e-02  2.4142e-07  0.0000
## p11 -1.6215e+00  1.0885e-01 -1.4897e+01  0.0000e+00  1.5916e-06  0.0000
## p22 -1.0560e+01  3.5137e+02 -3.0055e-02  9.7604e-01 -2.7692e-08  0.0000
## p33 -9.9909e+00  5.0093e+02 -1.9945e-02  9.8410e-01 -2.1376e-09  0.0000
## Ria  7.5247e+00  1.0167e+00  7.4010e+00  8.8130e-13 -2.1340e-05  0.0000
## Rih  5.2512e-01  1.1750e-01  4.4692e+00  1.0341e-05  1.3200e-07  0.0000
## Rim  8.3890e+00  2.3516e+01  3.5674e-01  7.2148e-01  1.6176e-06  0.0000
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0  Th0  Tm0  Aw  Ch  Ci  Cm  e11  p11  p22  p33
## Th0 -0.03
## Tm0 -0.01  0.26
## Aw   0.02 -0.35 -0.45
## Ch  -0.02  0.24  0.71 -0.21
## Ci   0.05 -0.38 -0.63  0.64 -0.65
## Cm   0.01 -0.27 -0.94  0.48 -0.73  0.67
## e11  0.02 -0.04 -0.16 -0.03 -0.48  0.40  0.18
## p11 -0.02  0.04  0.21  0.06  0.55 -0.45 -0.22 -0.92
## p22  0.00 -0.01 -0.03  0.00 -0.06  0.04  0.02  0.08 -0.07
## p33  0.00  0.03  0.13 -0.05  0.11 -0.08 -0.12 -0.02  0.03  0.44
## Ria -0.01  0.25  0.44 -0.51  0.45 -0.55 -0.70 -0.12  0.11  0.07  0.07
## Rih -0.01  0.16 -0.35 -0.51 -0.48 -0.13  0.29  0.34 -0.42  0.06 -0.06
## Rim -0.01  0.32  0.99 -0.47  0.72 -0.65 -0.97 -0.17  0.21 -0.03  0.13
##      Ria  Rih
## Th0
## Tm0
## Aw
## Ch
## Ci
## Cm
## e11
## p11
## p22
## p33
## Ria
```

```
## Rih 0.08
## Rim 0.55 -0.32
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.7.1.

```
par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF", col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus, col=2, lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat), ll, ul, col=c(1,2,4,4), lty=c(1,1,3,3))
```

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.7.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi (" * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa (" * degree * C *")"), yaxt = "n")
```

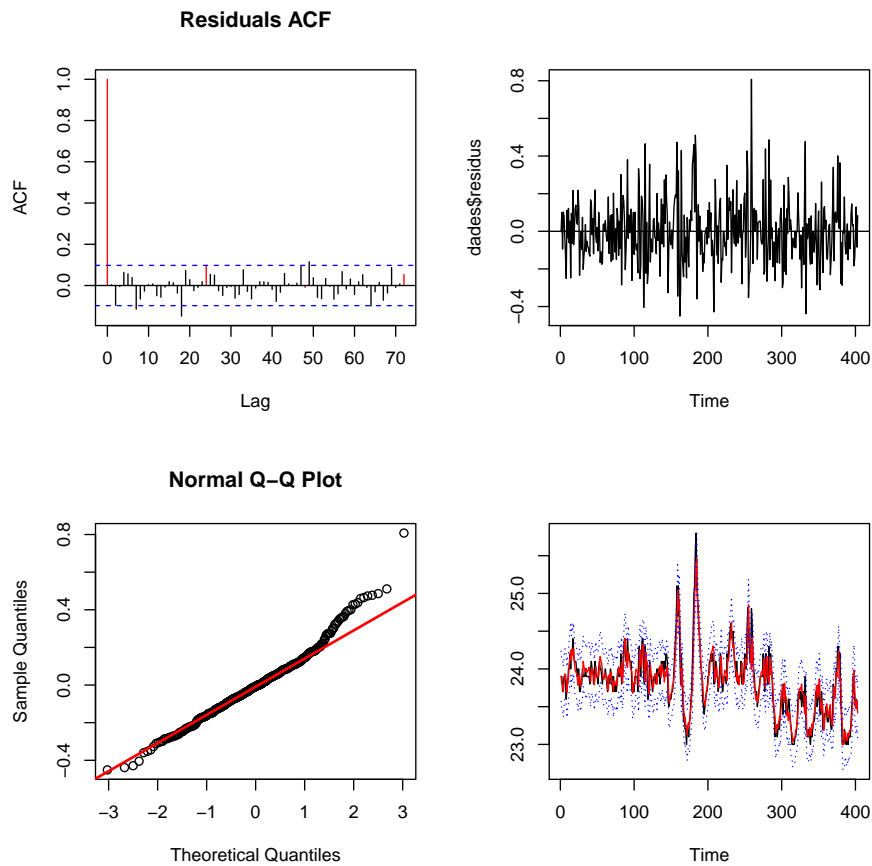


Figura A.7.1: Representació dels residus en el model TiThTm.

```
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kW", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM

## [1] 14
```

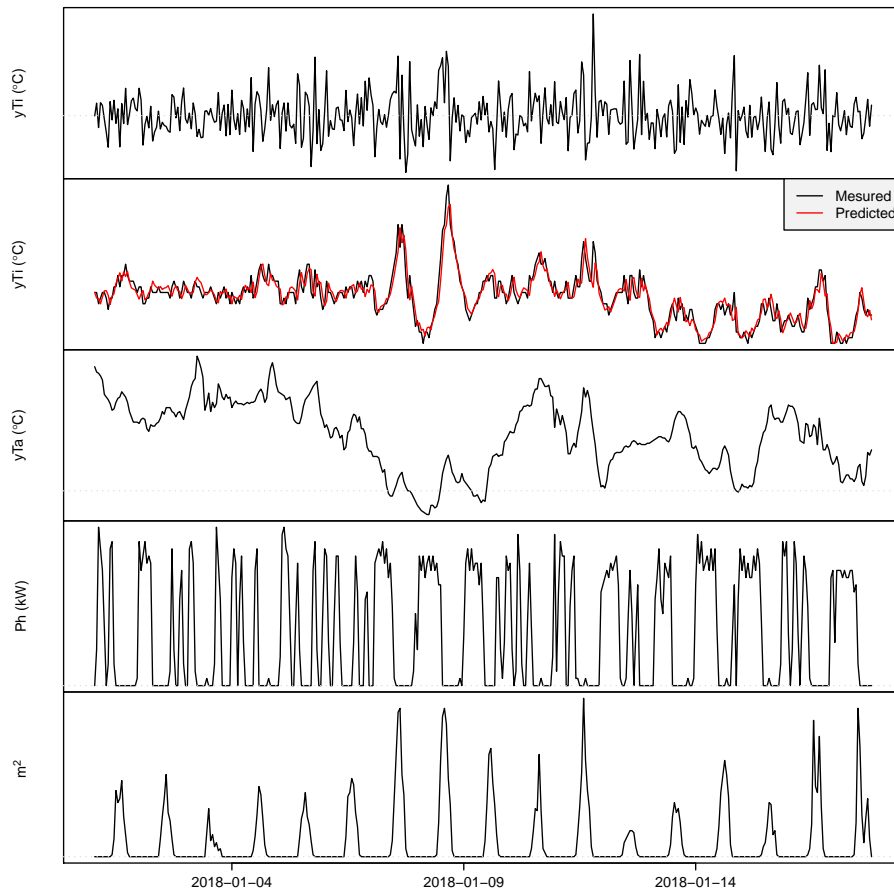



Figura A.7.2: Representació de les sèries resultants en el model TiThTm.

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik
## [1] 137.0133
```

A.8 Model TiTeThTm

El model que es definirà té com a equacions d'estat:

$$\begin{aligned}dT_i &= \frac{1}{R_{im}C_i}(T_m - T_i)dt + \frac{1}{R_{ie}C_i}(T_e - T_i)dt + \frac{1}{R_{ih}C_i}(T_h - T_i)dt + \frac{1}{C_i}A_w\phi_s dt + \sigma_i d\omega_i \\dT_e &= \frac{1}{R_{ie}C_e}(T_i - T_e)dt + \frac{1}{R_{ea}C_e}(T_a - T_e)dt + \sigma_e d\omega_e \\dT_h &= \frac{1}{R_{ih}C_h}(T_i - T_h)dt + \frac{1}{C_h}\phi_h dt + \sigma_h d\omega_h \\dT_m &= \frac{1}{R_{im}C_m}(T_i - T_m)dt + \sigma_m d\omega_m\end{aligned}$$

```
## Creació d'un nou objecte de classe ctsm
modelTiTeThTm <- ctsm$new()
## Especificar el sistema d'equacions
modelTiTeThTm$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rim)*(Tm-Ti) + (Te-Ti)/(Ci*Rie) + Aw/Ci*Ps
+ 1/(Ci*Rih)*(Th-Ti))*dt + exp(p11)*dw1)
modelTiTeThTm$addSystem(dTe ~ (1/(Ce*Rie)*(Ti-Te) + 1/(Ce*Rea)*(Ta-Te))*dt
+ exp(p22)*dw2)
modelTiTeThTm$addSystem(dTh ~ (1/(Ch*Rih)*(Ti-Th)+ 1/Ch*Ph)*dt + exp(p33)*dw3)
modelTiTeThTm$addSystem(dTm ~ (1/(Cm*Rim)*(Ti-Tm))*dt + exp(p44)*dw4)
## Els inputs
modelTiTeThTm$addInput(Ta, Ps, Ph)
```

Seguidament, cal afegir l'equació de mesura, que és:

$$Y(t) = T_i(t) + \epsilon(t)$$

```
## Equació de mesura: Ti és l'estat, yTi és l'output mesurat
modelTiTeThTm$addObs(yTi ~ Ti)
## Fixar la variància de l'error de mesura
modelTiTeThTm$setVariance(yTi ~ exp(e11))
```

A continuació, cal introduir valors inicials per a les variables d'estat en els primers espais temporals i valors inicials per als paràmetres:

```
## Fixar valors inicials pels estats pel primer punt de temps
modelTiTeThTm$setParameter(Ti = c(init = 15, lb = 0, ub = 45))
modelTiTeThTm$setParameter(Te = c(init = 5, lb = -20, ub = 45))
modelTiTeThTm$setParameter(Th = c(init = 5, lb = -20, ub = 45))
modelTiTeThTm$setParameter(Tm = c(init = 5, lb = -20, ub = 45))
## Fixar valors inicials pels paràmetres
modelTiTeThTm$setParameter(Ci = c(init = 1, lb = 1E-8, ub = 50))
```

```

modelTiTeThTm$setParameter(Ce = c(init = 2, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Ch = c(init = 2, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Cm = c(init = 2, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Rie = c(init = 10, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Rih = c(init = 10, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Rim = c(init = 10, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Rea = c(init = 10, lb = 1E-8, ub = 50))
modelTiTeThTm$setParameter(Aw = c(init = 20, lb = 0.1, ub = 200))
modelTiTeThTm$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeThTm$setParameter(p22 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeThTm$setParameter(p33 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeThTm$setParameter(p44 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeThTm$setParameter(e11 = c(init = -1, lb = -50, ub = 10))

```

I finalment, es realitza l'estimació dels paràmetres:

```
fit <- modelTiTeThTm$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

Seguidament, s'avaluaran els resultats de l'estimació dels paràmetres per al model de quatre estats.

```
summary(fit, extended = TRUE)
```

```

## Coefficients:
##      Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)    dF/dPar dPen/dPar
## Ti0  2.3891e+01  1.4988e-01  1.5941e+02  0.0000e+00 -9.2973e+00  0.0002
## Te0  2.3835e+01  4.8466e-01  4.9178e+01  0.0000e+00  4.9086e-01  0.0002
## Th0  2.3987e+01  5.6117e-01  4.2744e+01  0.0000e+00  6.0130e+00  0.0002
## Tm0  4.4957e+01  1.3108e-02  3.4297e+03  0.0000e+00  1.0896e+02 107.1546
## Aw   6.5810e+00  1.5320e+00  4.2957e+00  2.2131e-05  6.1223e-01  0.0000
## Ce   5.8278e+00  1.4200e+00  4.1041e+00  4.9676e-05 -7.5312e+02  0.0000
## Ch   1.2910e+01  3.9759e+00  3.2472e+00  1.2682e-03 -3.4131e+03  0.0000
## Ci   1.4231e-01  2.2659e-01  6.2804e-01  5.3035e-01  1.5003e+02  0.0000
## Cm   7.3549e+00  7.8285e+00  9.3951e-01  3.4806e-01  6.2482e+02  0.0000
## e11 -3.0187e+01  6.6971e+00 -4.5075e+00  8.7440e-06  3.6580e-04  0.0004
## p11 -2.8429e-01  9.4970e-01 -2.9935e-01  7.6484e-01  1.4725e+00  0.0000
## p22 -1.7291e+00  3.0408e-01 -5.6864e+00  2.5974e-08 -4.1188e+01  0.0000
## p33 -4.9356e+01  3.6763e+00 -1.3425e+01  0.0000e+00  5.9422e-01  0.5942
## p44 -3.4061e+01  5.6920e+01 -5.9839e-01  5.4993e-01  6.5277e-04  0.0007
## Rea  7.7528e+00  7.9336e-01  9.7721e+00  0.0000e+00 -4.1679e+02  0.0000
## Rie  2.5422e-01  3.3465e-02  7.5964e+00  2.4603e-13 -7.8030e+03  0.0000
## Rih  9.0376e-01  2.3669e-01  3.8183e+00  1.5675e-04 -2.3477e+02  0.0000
## Rim  2.8175e+01  2.8758e+00  9.7972e+00  0.0000e+00 -1.6520e+03  0.0003
##
## Correlation of coefficients:
##      Ti0  Te0  Th0  Tm0  Aw   Ce   Ch   Ci   Cm   e11  p11
## Te0  0.24

```

```
## Th0  0.11 -0.70
## Tm0  0.06  0.13  0.07
## Aw   -0.01  0.16 -0.23  0.01
## Ce   -0.14  0.16 -0.50 -0.24  0.34
## Ch    0.12 -0.12  0.44  0.52  0.22 -0.67
## Ci    0.18 -0.29  0.60  0.13 -0.10 -0.67  0.59
## Cm    0.09 -0.46  0.60 -0.38 -0.08 -0.44  0.38  0.59
## e11   0.18 -0.29  0.60  0.07 -0.14 -0.74  0.59  0.99  0.63
## p11  -0.19  0.33 -0.66 -0.18  0.15  0.72 -0.62 -0.98 -0.63 -0.97
## p22   0.17 -0.27  0.62  0.33 -0.06 -0.79  0.81  0.87  0.59  0.87 -0.92
## p33   0.18 -0.34  0.66  0.32 -0.15 -0.69  0.61  0.93  0.58  0.92 -0.96
## p44  -0.17  0.34 -0.66 -0.37  0.16  0.67 -0.61 -0.91 -0.56 -0.88  0.93
## Rea  -0.07  0.38 -0.48  0.39 -0.12  0.33 -0.37 -0.48 -0.96 -0.52  0.51
## Rie   0.02 -0.34  0.29 -0.74 -0.33 -0.08 -0.36  0.30  0.69  0.35 -0.30
## Rih  -0.10  0.02 -0.23 -0.39 -0.54  0.39 -0.86 -0.50 -0.30 -0.47  0.49
## Rim  -0.10  0.35 -0.53  0.28  0.05  0.60 -0.52 -0.66 -0.91 -0.71  0.68
##      p22  p33  p44  Rea  Rie  Rih
## Te0
## Th0
## Tm0
## Aw
## Ce
## Ch
## Ci
## Cm
## e11
## p11
## p22
## p33  0.89
## p44 -0.87 -1.00
## Rea -0.51 -0.47  0.45
## Rie  0.08  0.25 -0.23 -0.63
## Rih -0.69 -0.48  0.47  0.38  0.35
## Rim -0.68 -0.63  0.60  0.89 -0.55  0.43
```

I es calculen prediccions per a l'etapa següent, amb les que s'analitzaran les propietats dels residus de soroll blanc (per als residus de les prediccions de l'etapa següent):

```
## Es calculen les prediccions per a la següent etapa
pred <- predict(fit)[[1]]
## Es calculen els residus i s'afegeixen al data.frame creat a l'inici de "dades"
dades$yTiHat <- pred$output$pred$yTi
dades$residus <- dades$yTi - dades$yTiHat
```

A continuació, s'analitzen els resultats. Els gràfics obtinguts es poden observar en la figura A.8.1.

```

par(mfrow=c(2,2))
acf(dades$residus, lag.max = 6*12, main = "Residuals ACF",col=c(2,rep(1,23)))

ts.plot(dades$residus)
abline(h=0)

qqnorm(dades$residus)
qqline(dades$residus,col=2,lwd=2)

ll=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.025)*pred$output$sd)
ul=ts(dades$yTiHat+qnorm(0.975)*pred$output$sd)

ts.plot(ts(dades$yTi), ts(dades$yTiHat),ll,ul,col=c(1,2,4,4),lty=c(1,1,3,3))

```

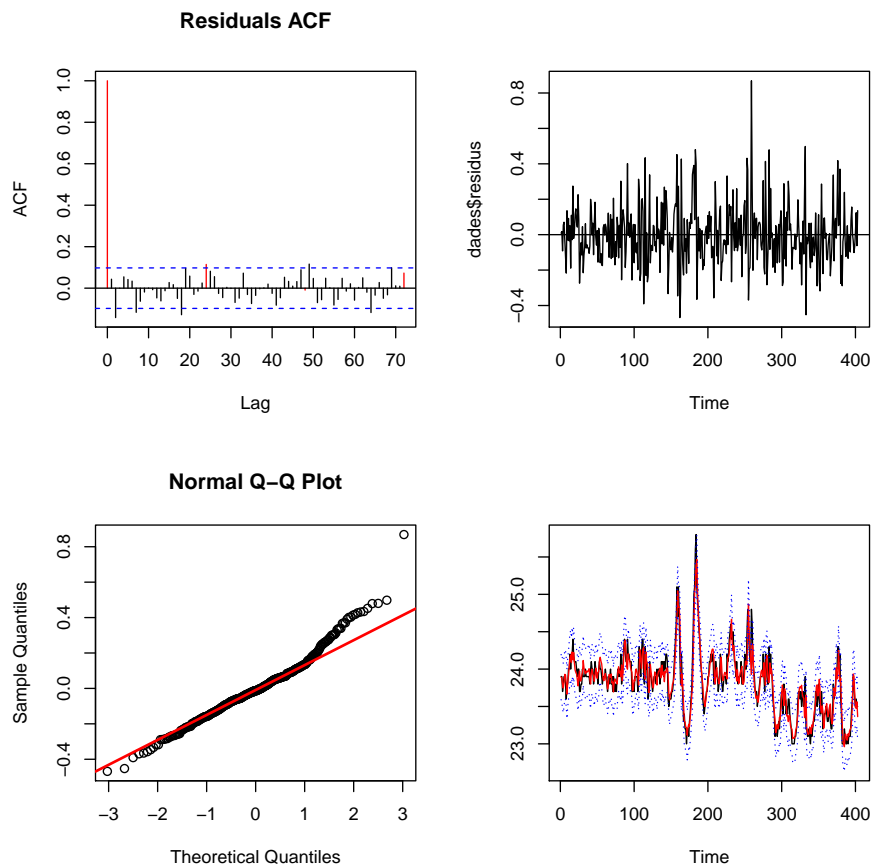


Figura A.8.1: Representació dels residus en el model TiTeThTm.

Finalment, es representen els resultats. Els gràfics resultants es poden observar en la figura A.8.2.

```
plotTSBeg(5)
gridSeq <- seq(asP("2009-01-01"), by = "days", len = 365)

plot(dades$timedate, dades$residus, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi ( " * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$yTi, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTi ( " * degree * C *")"), yaxt = "n", ylim =
      range(dades[, c("yTi", "yTiHat")]))
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)
lines(dades$timedate, dades$yTiHat, col = 2)
legend("topright", c("Mesured", "Predicted"), lty = 1, col = 1:2, bg = "grey95")

plot(dades$timedate, dades$Ta, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression("yTa ( " * degree * C *")"), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ph, type = "l", xlab = "", ylab = "Ph (kW)", yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plot(dades$timedate, dades$Ps, type = "l", xlab = "", ylab =
      expression(paste("Ps", frac("kw", "m"^{2}))), yaxt = "n")
abline(v = gridSeq, h = 0, col = "grey85", lty = 3)

plotTSXAxis(dades$timedate, format = "%Y-%m-%d")
```

Número de paràmetres:

```
fit$model$NPARAM
```

```
## [1] 18
```

Logaritme de la versemblança:

```
fit$loglik
```

```
## [1] 143.3065
```

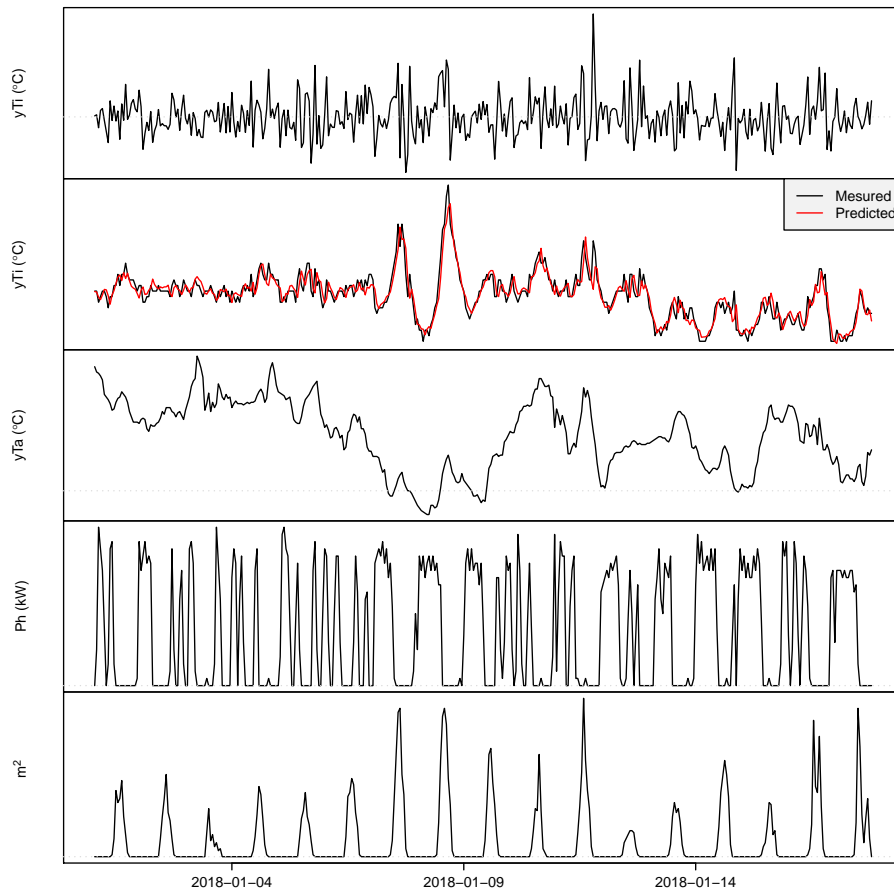


Figura A.8.2: Representació de les sèries resultants en el model TiTeThTm.

B. Codi utilitzat en els testos de Raó de la Versemblança

En l'apartat següent es presenten els diferents resultats dels testos de Raó de la Versemblança realitzats.

Les dades a partir de les quals es parteix són:

```
loglikTi <- 114.0731
loglikTiTe <- 114.9891
loglikTiTh <- 133.1669
loglikTiTm <- 115.1015
loglikTiTeTh <- 139.3091
loglikTiThTm <- 137.0133
loglikTiTeThTm <- 143.3065

nparamTi <- 6
nparamTiTe <- 10
nparamTiTh <- 10
nparamTiTm <- 10
nparamTiTeTh <- 14
nparamTiThTm <- 14
nparamTiTeThTm <- 18
```

B.1 Model Ti vs Model TiTe

El test té com a objectiu acceptar una de les dues hipòtesis:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model Ti} \\ H_1 : \text{s'escull el model TiTe} \end{cases}$$

Els resultats obtinguts són:

```
estcont_1 <- -2*(loglikTi - loglikTiTe)
df_1 <- nparamTiTe - nparamTi
valcrit_1 <- qchisq(0.95,df_1)
estcont_1

## [1] 1.832

df_1

## [1] 4

valcrit_1

## [1] 9.487729
```


I per tant, s'accepta la hipòtesi nul·la.

B.2 Model Ti vs Model TiTh

El test té com a objectiu acceptar una de les dues hipòtesis:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model Ti} \\ H_1 : \text{s'escull el model TiTh} \end{cases}$$

Els resultats obtinguts són:

```
estcont_2 <- -2*(loglikTi - loglikTiTh)
df_2 <- nparamTiTh - nparamTi
valcrit_2 <- qchisq(0.95,df_2)
estcont_2

## [1] 38.1876

df_2

## [1] 4

valcrit_2

## [1] 9.487729
```

I per tant, es rebutja la hipòtesi nul·la.

B.3 Model Ti vs Model TiTm

El test té com a objectiu acceptar una de les dues hipòtesis:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model Ti} \\ H_1 : \text{s'escull el model TiTm} \end{cases}$$

Els resultats obtinguts són:

```
estcont_3 <- -2*(loglikTi - loglikTiTm)
df_3 <- nparamTiTm - nparamTi
valcrit_3 <- qchisq(0.95,df_3)
estcont_3

## [1] 2.0568

df_3
```

```
## [1] 4  
  
valcrit_3  
  
## [1] 9.487729
```

I per tant, s'accepta la hipòtesi nul·la.

B.4 Model TiTh vs Model TiTeTh

El test té com a objectiu acceptar una de les dues hipòtesis:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model TiTh} \\ H_1 : \text{s'escull el model TiTeTh} \end{cases}$$

Els resultats obtinguts són:

```
estcont_4 <- -2*(loglikTiTh - loglikTiTeTh)  
df_4 <- nparamTiTeTh - nparamTiTh  
valcrit_4 <- qchisq(0.95,df_4)  
estcont_4  
  
## [1] 12.2844  
  
df_4  
  
## [1] 4  
  
valcrit_4  
  
## [1] 9.487729
```

I per tant, es rebutja la hipòtesi nul·la.

B.5 Model TiTh vs Model TiThTm

El test té com a objectiu acceptar una de les dues hipòtesis:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model TiTh} \\ H_1 : \text{s'escull el model TiThTm} \end{cases}$$

Els resultats obtinguts són:

```

estcont_5 <- -2*(loglikTiTh - loglikTiThTm)
df_5 <- nparamTiThTm - nparamTiTh
valcrit_5 <- qchisq(0.95,df_5)
estcont_5

## [1] 7.6928

df_5

## [1] 4

valcrit_5

## [1] 9.487729

```

I per tant, s'accepta la hipòtesi nul·la.

B.6 Model TiTeTh vs Model TiTeThTm

El test té com a objectiu acceptar una de les dues hipòtesis:

$$\begin{cases} H_0 : \text{s'escull el model TiTeTh} \\ H_1 : \text{s'escull el model TiTeThTm} \end{cases}$$

Els resultats obtinguts són:

```

estcont_6 <- -2*(loglikTiTeTh - loglikTiTeThTm)
df_6 <- nparamTiTeThTm - nparamTiTeTh
valcrit_6 <- qchisq(0.95,df_6)
estcont_6

## [1] 7.9948

df_6

## [1] 4

valcrit_6

## [1] 9.487729

```

I per tant, s'accepta la hipòtesi nul·la.

C. Codi utilitzat per obtenir el filtrat i l'allisat

El model a partir del qual es vol realitzar el filtrat i l'*smooth* és el TiTeTh. Seguidament, es torna a calcular, com s'ha fet en l'apartat A.5:

```
modelTiTeTh <- ctsm$new()

modelTiTeTh$addSystem(dTi ~ (1/(Ci*Rih)*(Th-Ti) + 1/(Ci*Rie)*(Te-Ti)
                             + Aw/Ci*Ps)*dt + exp(p11)*dw1)
modelTiTeTh$addSystem(dTe ~ (1/(Ce*Rie)*(Ti-Te) + 1/(Ce*Rea)*(Ta-Te))*dt
                             + exp(p22)*dw2)
modelTiTeTh$addSystem(dTh ~ (1/(Ch*Rih)*(Ti-Th) + 1/Ch*Ph)*dt + exp(p33)*dw3)

modelTiTeTh$addInput(Ta, Ps, Ph)

modelTiTeTh$addObs(yTi ~ Ti)
modelTiTeTh$setVariance(yTi ~ exp(e11))

modelTiTeTh$setParameter(Ti = c(init = 24, lb = 0, ub = 45))
modelTiTeTh$setParameter(Te = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))
modelTiTeTh$setParameter(Th = c(init = 15, lb = -20, ub = 45))

modelTiTeTh$setParameter(Ci = c(init = 6, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Ce = c(init = 12, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Ch = c(init = 13, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Rie = c(init = 0.5, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Rih = c(init = 1, lb = 0.0001, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Rea = c(init = 10, lb = 0.01, ub = 40))
modelTiTeTh$setParameter(Aw = c(init = 7, lb = 0.1, ub = 50))
modelTiTeTh$setParameter(p11 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTh$setParameter(p22 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTh$setParameter(p33 = c(init = 1, lb = -50, ub = 10))
modelTiTeTh$setParameter(e11 = c(init = -5, lb = -50, ub = 10))

fit <- modelTiTeTh$estimate(data = dades, threads = param$threads)
```

A continuació es farà el filtrat de les dades. El resultat es pot observar en la figura C.0.1.

```
filtrat <- filter.ctsmr(fit)
fil_Ti <- filtrat[[1]]$filtered[[1]]
fil_Te <- filtrat[[1]]$filtered[[2]]
fil_Th <- filtrat[[1]]$filtered[[3]]
sd_Tif <- filtrat[[1]]$sd[[1]]
sd_Tef <- filtrat[[1]]$sd[[2]]
sd_Thf <- filtrat[[1]]$sd[[3]]
ub_Tif <- fil_Ti + sd_Tif
```

```

lb_Tif <- fil_Ti - sd_Tif
ub_Tef <- fil_Te + sd_Tef
lb_Tef <- fil_Te - sd_Tef
ub_Thf <- fil_Th + sd_Thf
lb_Thf <- fil_Th - sd_Thf

par(mfrow = c(3,1))
ts.plot(ts(fil_Ti), ts(ub_Tif), ts(lb_Tif), ylab = expression("T"["i"]),
        col = c(1, 4, 4))
ts.plot(ts(fil_Te), ts(ub_Tef), ts(lb_Tef), ylab = expression("T"["e"]),
        col = c(1, 4, 4))
ts.plot(ts(fil_Th), ts(ub_Thf), ts(lb_Thf), ylab = expression("T"["h"]),
        col = c(1, 4, 4))

```

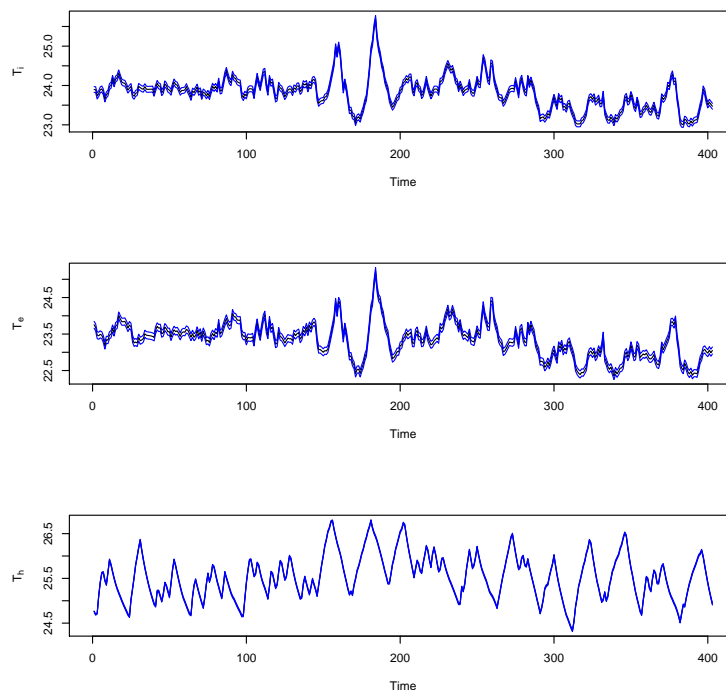


Figura C.0.1: Representació del filtrat.

Finalment es farà el filtrat de les dades. El resultat es pot observar en la figura C.0.2.

```

smooth <- smooth.ctsmr(fit)
smoo_Ti <- smooth[[1]]$state[,1]
smoo_Te <- smooth[[1]]$state[,2]
smoo_Th <- smooth[[1]]$state[,3]
sd_Tis <- smooth[[1]]$sd[,1]

```

```
sd_Tes <- smooth[[1]]$sd[,2]
sd_Ths <- smooth[[1]]$sd[,3]
ub_Tis <- smoo_Ti + sd_Tis
lb_Tis <- smoo_Ti - sd_Tis
ub_Tes <- smoo_Te + sd_Tes
lb_Tes <- smoo_Te - sd_Tes
ub_Ths <- smoo_Th + sd_Ths
lb_Ths <- smoo_Th - sd_Ths

par(mfrow = c(3,1))
ts.plot(ts(smoo_Ti), ts(ub_Tis), ts(lb_Tis), ylab = expression("T"["i"]),
        col = c(1, 4, 4))
ts.plot(ts(smoo_Te), ts(ub_Tes), ts(lb_Tes), ylab = expression("T"["e"]),
        col = c(1, 4, 4))
ts.plot(ts(smoo_Th), ts(ub_Ths), ts(lb_Ths), ylab = expression("T"["h"]),
        col = c(1, 4, 4))
```

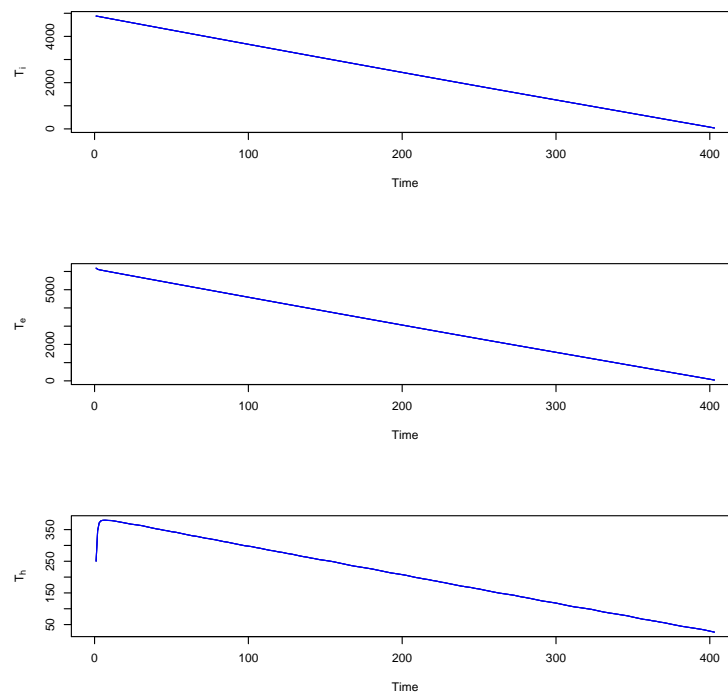


Figura C.0.2: Representació de l'allisat.

D. Codi utilitzat per obtenir els gràfics en el cas determinista

D.1 Cas 1: no es tenen inputs

Els resultats obtinguts són:

$$\begin{aligned} T_i(t) &= -0.0915e^{-29.7530t} + 0.3403e^{-0.2260t} + 23.6451e^{-0.0050t}, \\ T_e(t) &= 0.0020e^{-29.7530t} + 0.5075e^{-0.2260t} + 23.2448e^{-0.0050t}, \\ T_h(t) &= 0.0003e^{-29.7530t} - 0.2576e^{-0.2260t} + 25.0213e^{-0.0050t}. \end{aligned} \quad (D.1.1)$$

La representació d'aquestes expressions es pot observar en la figura D.1.1.

```
x_vector <- seq(0, 1000, by = 1)
Ti_1 <- -0.0915*exp(-29.7530*x_vector) + 0.3403*exp(-0.2260*x_vector) +
23.6451*exp(-0.0050*x_vector)
Te_1 <- 0.0020*exp(-29.7530*x_vector) + 0.5075*exp(-0.2260*x_vector) +
23.2448*exp(-0.0050*x_vector)
Th_1 <- 0.0003*exp(-29.7530*x_vector) - 0.2576*exp(-0.2260*x_vector) +
25.0213*exp(-0.0050*x_vector)
par(mfrow = c(3,1))
plot(Ti_1, ylab = expression("T"["i"]))
plot(Te_1, ylab = expression("T"["e"]))
plot(Th_1, ylab = expression("T"["h"]))
```

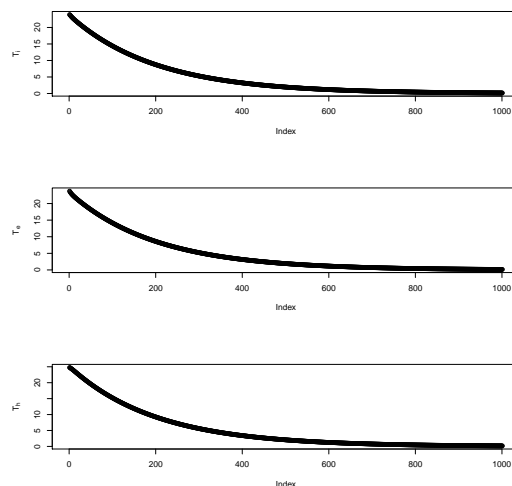


Figura D.1.1: Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista.

D.2 Cas 2: es coneix la mitjana de la temperatura ambient

Els resultats obtinguts són:

$$\begin{aligned} T_i(t) &= -0.0884e^{-29.7530t} + 0.2070e^{-0.2260t} + 19.1748e^{-0.0050t} + 4.4205, \\ T_e(t) &= 0.0019e^{-29.7530t} + 0.3087e^{-0.2260t} + 19.0271e^{-0.0050t} + 4.4165, \\ T_h(t) &= 0.0003e^{-29.7530t} - 0.1567e^{-0.2260t} + 20.4813e^{-0.0050t} + 4.4391. \end{aligned} \quad (D.2.1)$$

La representació d'aquestes expressions es pot observar en la figura D.2.1.

```
Ti_2 <- -0.0884*exp(-29.7530*x_vector) + 0.2070*exp(-0.2260*x_vector) +
19.1748*exp(-0.0050*x_vector)+ 4.4205
Te_2 <- 0.0019*exp(-29.7530*x_vector) + 0.3087*exp(-0.2260*x_vector) +
19.0271*exp(-0.0050*x_vector)+ 4.4165
Th_2 <- 0.0003*exp(-29.7530*x_vector) - 0.1567*exp(-0.2260*x_vector) +
20.4813*exp(-0.0050*x_vector)+ 4.4391
par(mfrow = c(3,1))
plot(Ti_2, ylab = expression("T"["i"]))
plot(Te_2, ylab = expression("T"["e"]))
plot(Th_2, ylab = expression("T"["h"]))
```

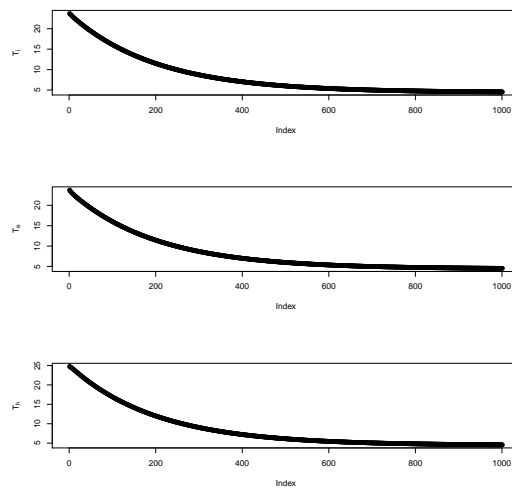


Figura D.2.1: Representació de les expressions obtingudes en el cas determinista considerant temperatura ambient.